Problèmes d'optimisation

#1) 1) Identification des variables

x : nb de pots de 1 litre
y : nb de pots de 3 litres

2) Inéquations

$x \geq 0, y \geq 0$

- $x + 3y \geq 60 \iff y \geq -\frac{x}{3} + 20$
- $x \geq 3y \iff y \leq \frac{x}{3}$
- $x + y \leq 60 \iff y \leq -x + 60$

3) Fonction objectif

$P = 8x + 20y$, maximiser

4) Polygone de contraintes

5) Sommets

A (30, 10) → P(A) = 8(30) + 20(10) = 440\$ → min
B (45, 15) → P(B) = 8(45) + 20(15) = 660\$ → max
C (60, 0) → P(C) = 8(60) + 20(0) = 480\$

a) Il doit vendre 45 pots de 1 litre et 15 pots de 3 litres.

b) 660 - 440 = 220\$

c) Nouvelle inéquation : $x + y \leq 100$

Sommets : A (30, 10) → P(A) = 440\$ → min
D (75, 25) → P(D) = 8(75) + 20(25) = 1100\$ → max
E (100, 0) → P(E) = 8(100) + 20(0) = 800\$
C (60, 0) → P(C) = 480\$

Le nouveau revenu principal est de 1100\$.

#2) 1- Identification des variables

x : nb de lavages partiels
y : nb de lavages complets

2- Système d'inéquations

- $x \geq 0$, $y \geq 0$
- $35x + 70y \leq 4200 \iff y \leq -\frac{1}{2}x + 60$
- $y \leq x \iff y \leq x$
- $x + y \geq 60 \iff y \geq -x + 60$
- $x + y \leq 90 \iff y \leq -x + 90$

3- Fonction objectif

$P = 3x + 5y$

4- Polygone de contraintes

5) Sommets

$A(30, 30) \rightarrow P(A) = 3(30) + 5(30) - 35 = 205\$$
$B(40, 40) \rightarrow P(B) = 3(40) + 5(40) - 35 = 285\$$
$C(60, 30) \rightarrow P(C) = 3(60) + 5(30) - 35 = 295\$ \rightarrow \max$
$D(90, 0) \rightarrow P(D) = 3(90) + 5(0) - 35 = 235\$$
$E(60, 0) \rightarrow P(E) = 3(60) + 5(0) - 35 = 145\$$

6) Reponse : Ils doivent faire 60 lavages extérieurs et 30 lavages complets.

b) $F(80, 20) \rightarrow P(F) = 3(80) + 5(20) - 35 = 305\$$
$G(100, 0) \rightarrow P(G) = 3(100) + 5(0) - 35 = 265\$$

Le profit augmente de $305 - 295 = 10\$$.

#3) 1) Variables

x : nb de serveurs
y : nb de placiers

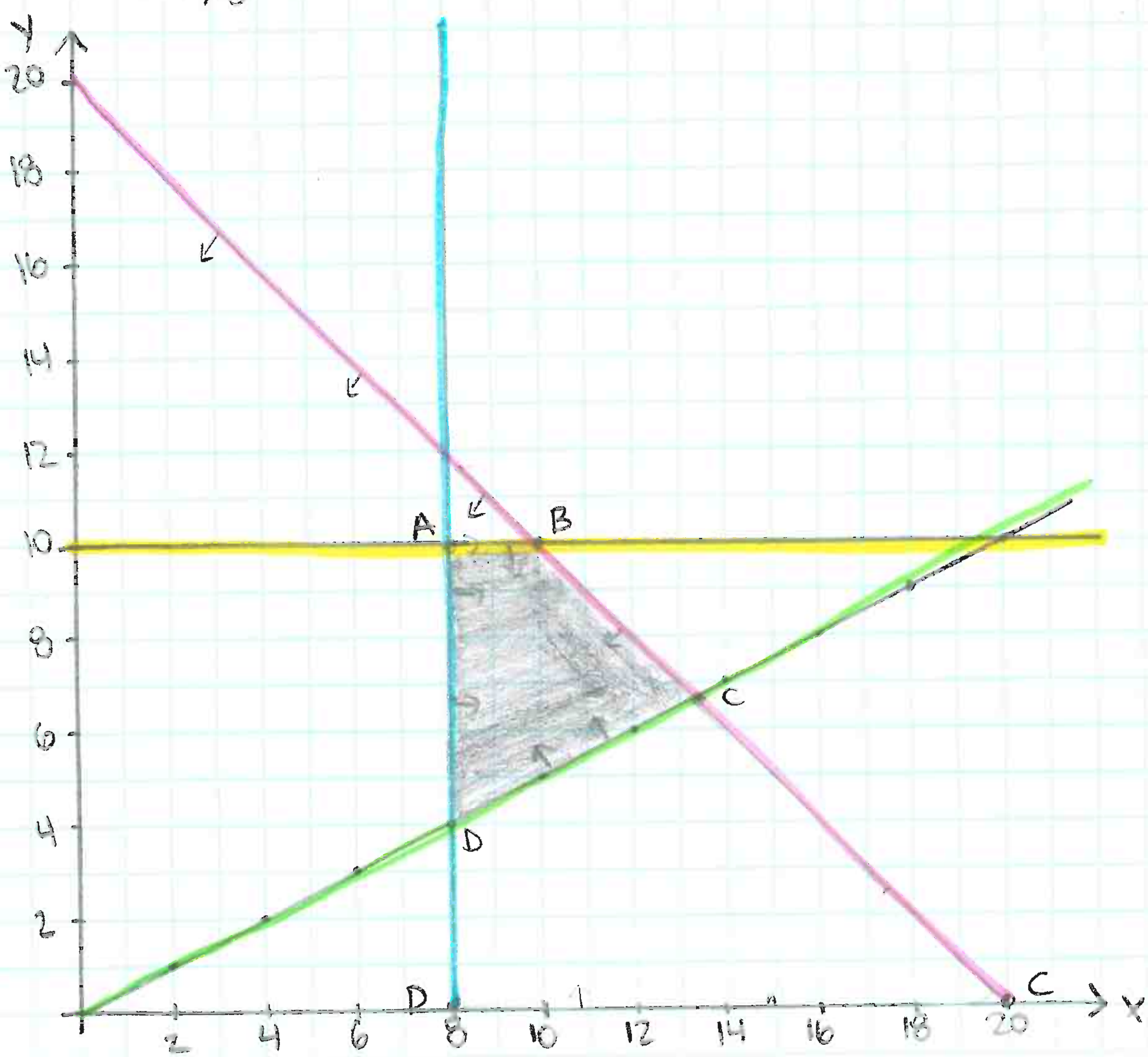
2) Inéquations

$x + y \leq 20$ $\quad x \geq 0$
$x \geq 8$ $\quad y \geq 0$
$y \leq 10$
$x \leq 2y \Leftrightarrow y \geq \frac{x}{2}$

3) Fonction objectif

Minimiser les dépenses
$D = 12x + 14y$

4) Polygone de contraintes



5) Sommets et solution optimale

A(8, 10)
B(10, 10)
C($\frac{40}{3}$, $\frac{20}{3}$)
D(8, 4)

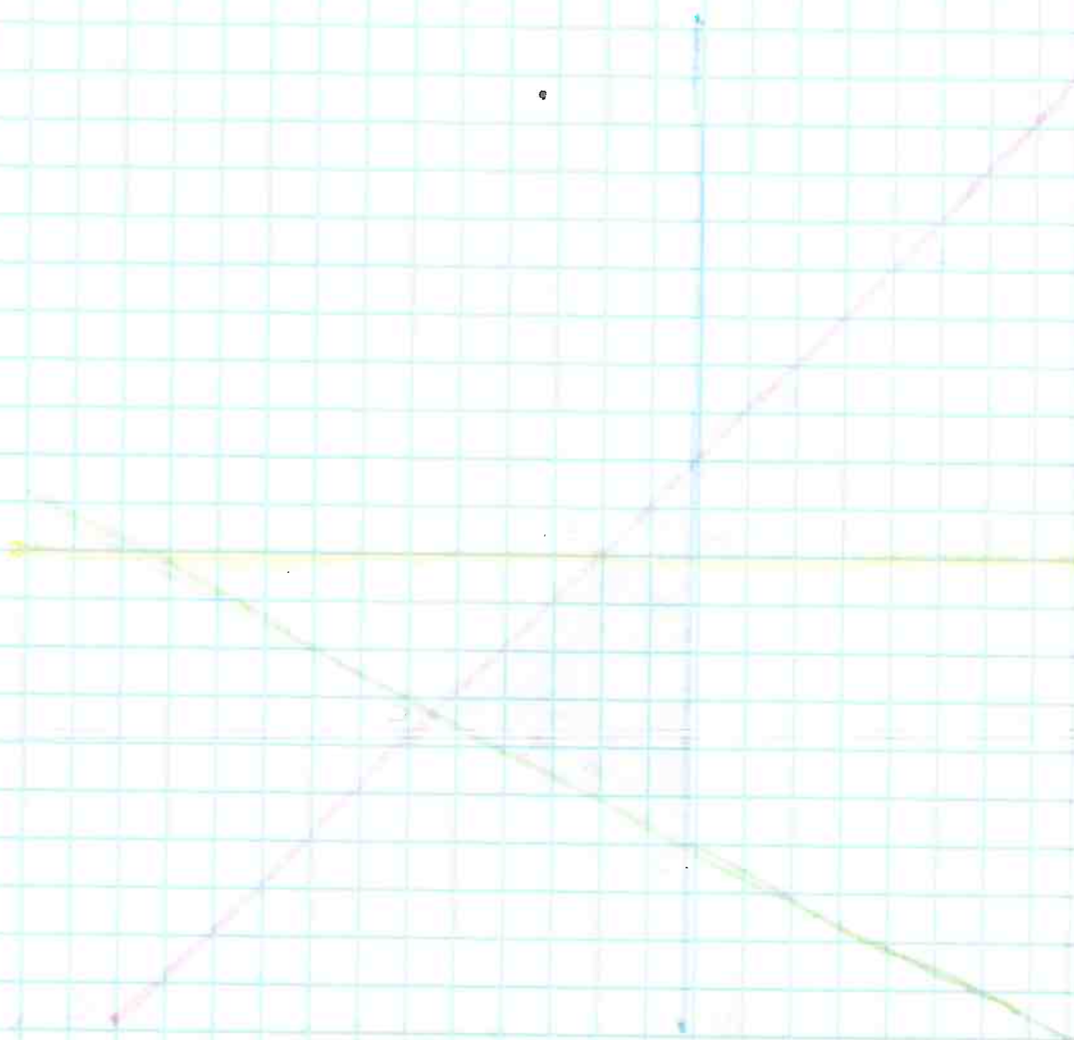
$\boxed{C}$

$x + y = 20$
$2y + y = 20$
$3y = 20$
$y = \frac{20}{3}$

$x = 2y$
$x = 2 \cdot \frac{20}{3}$
$x = \frac{40}{3}$

$D(A) = 12 \cdot 8 + 14 \cdot 10 = 236$
$D(B) = 12 \cdot 10 + 14 \cdot 10 = 260$
$D(C) = 12 \cdot {}^{40}/_{3} + 14 \cdot {}^{20}/_{3} \approx 253{,}3$
$D(D) = 12 \cdot 8 + 14 \cdot 4 = 152$ *

Réponse : La propriétaire doit engager 8 serveurs et 4 placiers pour une dépense minimale de 152$



#4) 1) Variables

x : nb lavages extérieurs
y : nb lavages complets

2) Inéquations

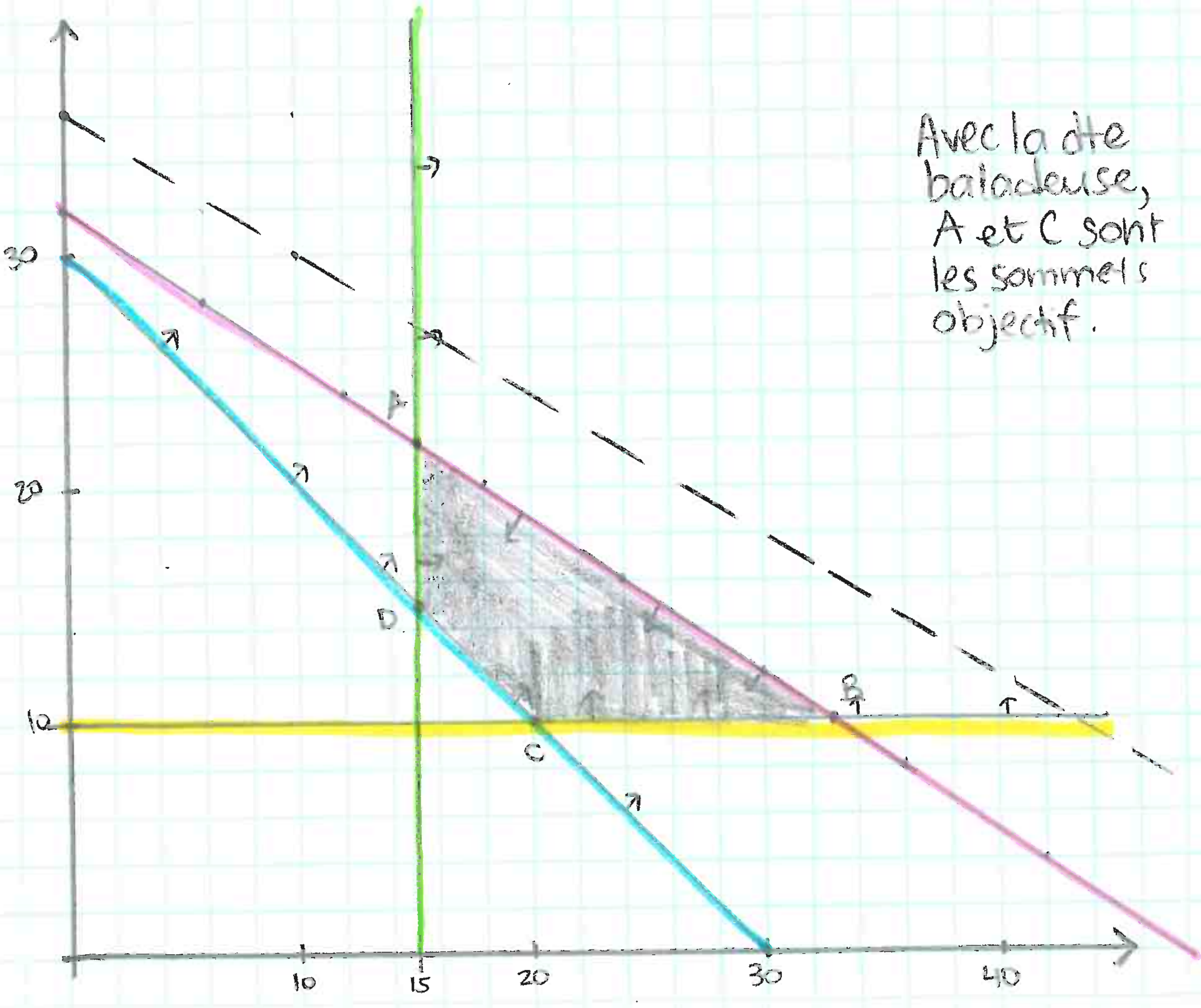
$x \geq 0$, $y \geq 0$
$x + y \geq 30$
$x \geq 15$
$y \geq 10$
$10x + 15y \leq 8 \cdot 60 \Leftrightarrow 10x + 15y \leq 480 \Leftrightarrow y \leq -\frac{2}{3}x + 32$

3) Objectif

maximiser les profits

$P = 15x + 25y \Rightarrow y = -\frac{3}{5}x + \frac{P}{25}$

4) Polygone de contraintes



Avec la dte baladeuse, A et C sont les sommets objectif.

5) Sommets

A(15,22)   P(A) = 15·15 + 25·22 = 775$ *

C(20,10)   P(C) = 15·20 + 25·10 = 550$

Nb total de voitures lavées : A : 15+22 = 37

B : 33+10 = 43 *

C : 20+10 = 30

D : 15+15 = 30

6) Réponse

Le bénévole a tort, car le profit maximal est atteint avec 37 voitures lavées et un autre sommet demande de laver 43 voitures.

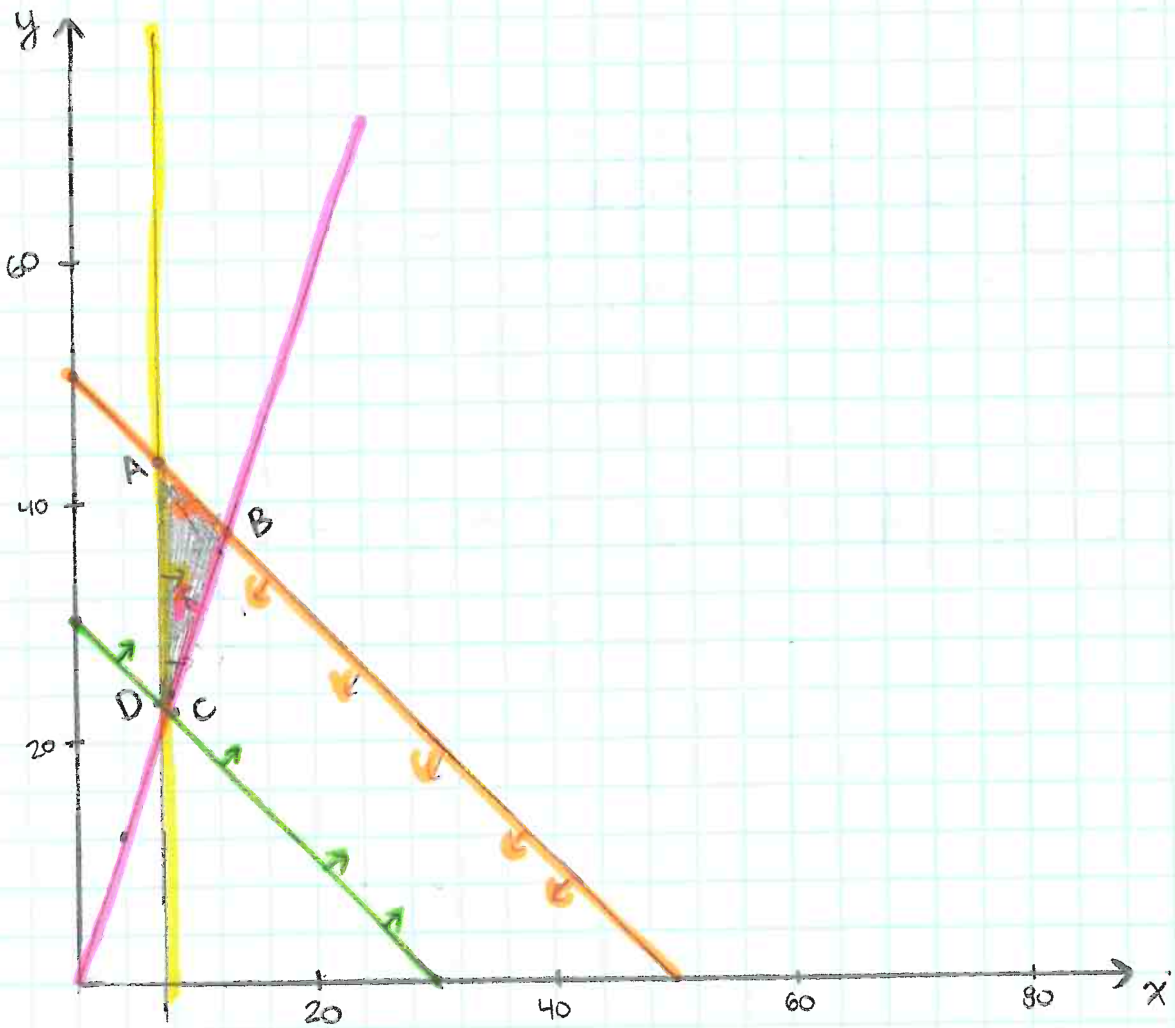
#5) 1) Variables

x : Qté pangasius (en kg)
y : Qté saumon (en kg)

2) Inéquations

$x \geq 0$, $y \geq 0$
$x + y \geq 30$
$x + y \leq 50$
$y \geq 3x$
$x \geq 7$

3) Polygone de contraintes



4) Objectif

Minimiser et maximiser les ventes

$P = 13,21x + 15,41y$

5) Sommets

A $(7, 43)$
B $(12,5 ; 37,5)$
C $(7,5 ; 22,5)$
D $(7, 23)$

$\boxed{B}$
$x + y = 50$
$x + 3x = 50$
$4x = 50$
$x = 12,5$

$y = 3x$
$y = 3 \cdot 12,5$
$y = 37,5$

$\boxed{C}$
$x + y = 30$
$x + 3x = 30$
$4x = 30$
$x = 7,5$

$y = 3x$
$y = 3 \cdot 7,5$
$y = 22,5$

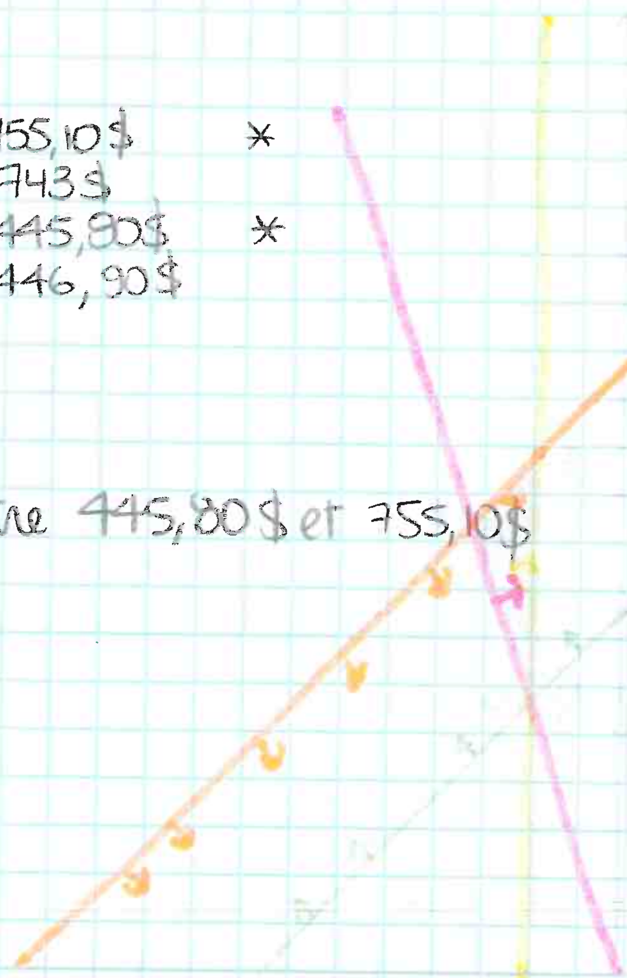
$\boxed{D}$
$x + y = 30$
$7 + y = 30$
$y = 23$

$\boxed{A}$
$x + y = 50$
$7 + y = 50$
$y = 43$

$P(A) = 13,21 \cdot 7 + 15,41 \cdot 43 = 755,10\$$ *
$P(B) = 13,21 \cdot 12,5 + 15,41 \cdot 37,5 = 743\$$
$P(C) = 13,21 \cdot 7,5 + 15,41 \cdot 22,5 = 445,80\$$ *
$P(D) = 13,21 \cdot 7 + 15,41 \cdot 23 = 446,90\$$

6) Réponse

Le poissonnier peut faire entre 445,80\$ et 755,10\$



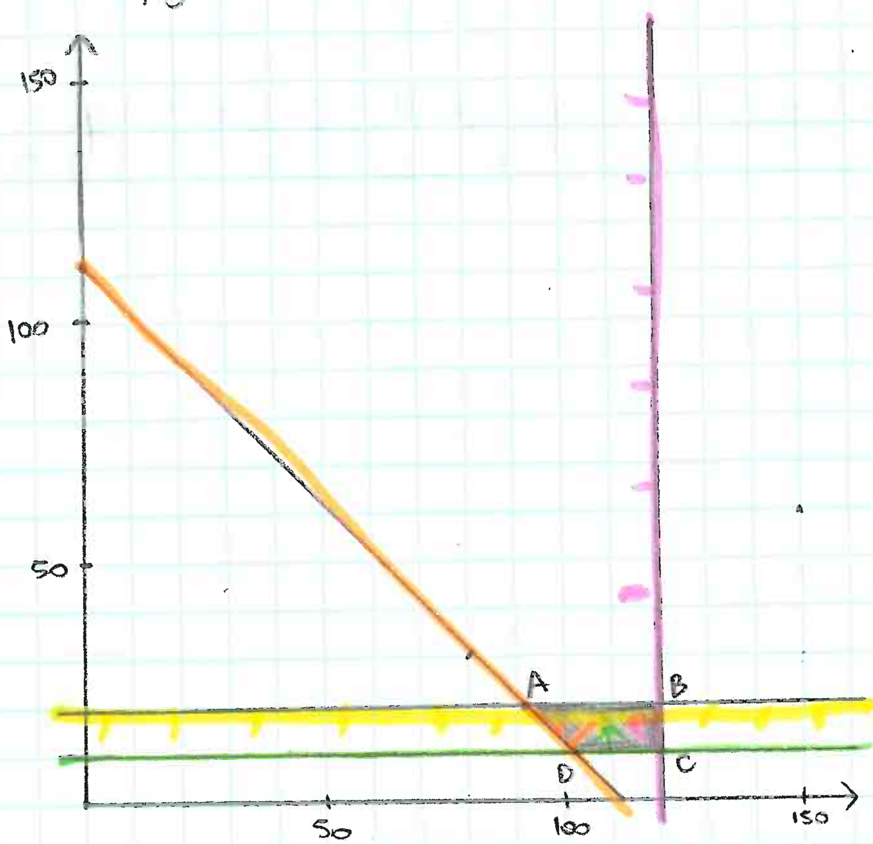
#6) 1) Variables

x : nb sièges classe économique
y : nb sièges classe affaire

2) Inéquations

$x \leq 120$
$y \leq 20$
$x+y \geq 0{,}8(120+20) \Leftrightarrow x+y \geq 112$
$y \geq 0{,}5 \cdot 20 \Leftrightarrow y \geq 10$
$x \geq 0,\ y \geq 0$

3) Polygone contraintes



4) Objectif

Eviter les pertes
$C = 600x + 1600y$

5) Sommets

A(92, 20)
B(120, 20)
C(120, 10)
D(102, 10)

$\boxed{A}$ $x+y=112$
$x+20=112$
$x=92$

$\boxed{D}$ $x+y=112$
$x+10=112$
$x=102$

$C(A) = 600 \cdot 92 + 1600 \cdot 20 = 87\,200$
$C(B) = 600 \cdot 120 + 1600 \cdot 20 = 104\,000$
$C(C) = 600 \cdot 120 + 1600 \cdot 10 = 88\,000$
$C(D) = 600 \cdot 102 + 1600 \cdot 10 = 77\,200$ *

6) Réponse

Air ABC doit vendre au moins 102 billets en classe économique et au moins 10 billets en classe affaire pour éviter d'enregistrer des pertes.

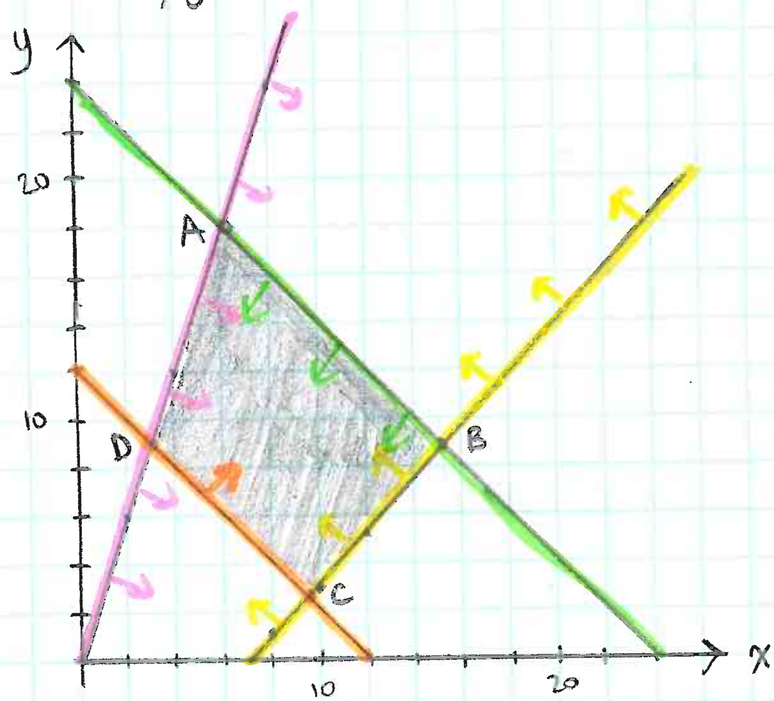
#7) 1) Variables

x : nb d'heures à temps normal
y : nb d'heures à temps supplémentaire

2) Inéquations

$x \geq 0, y \geq 0$
$y \leq 3x$
$x \leq y + 7 \iff y \geq x - 7$
$x + y \leq 24$
$x + y \geq 12$

3) Polygone de contraintes



4) Objectif

Maximiser salaire

$C_A = 8x + 12y$
$C_B = 7x + 14y$

5) Sommets

A (6,18)
B (15,5 ; 8,5)
C (9,5 ; 2,5)
D (3,9)

$\boxed{B}$ $x+y=24$
$y+7+y=24$
$2y=17$
$y=8,5$

$x=y+7$
$x=8,5+7$
$x=15,5$

$\boxed{C}$ $x+y=12$
$y+7+y=12$
$2y=5$
$y=2,5$

$x=y+7$
$x=2,5+7$
$x=9,5$

$\boxed{D}$ $x+y=12$
$x+3x=12$
$4x=12$
$x=3$

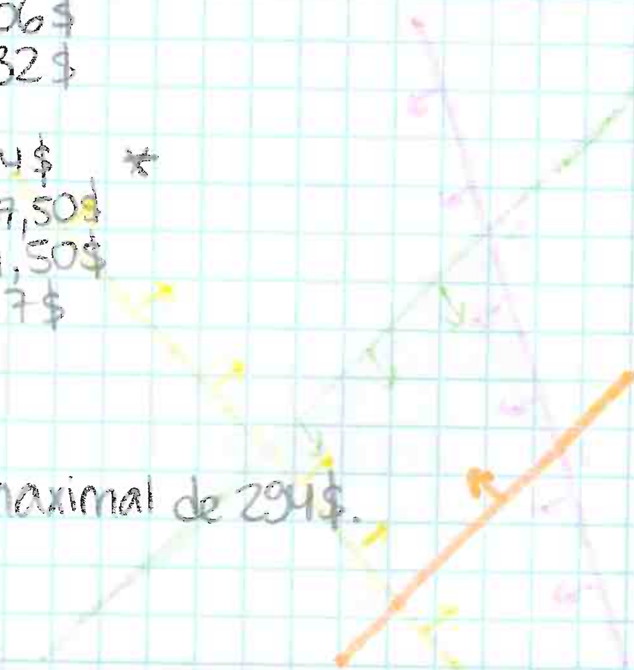
$y=3x$
$=3\cdot3$
$=9$

$C_A(A)=8\cdot6+12\cdot18=264\$$ *
$C_A(B)=8\cdot15,5+12\cdot8,5=226\$$
$C_A(C)=8\cdot9,5+12\cdot2,5=106\$$
$C_A(D)=8\cdot3+12\cdot9=132\$$

$C_B(A)=7\cdot6+14\cdot18=294\$$ *
$C_B(B)=7\cdot15,5+14\cdot8,5=227,50\$$
$C_B(C)=7\cdot9,5+14\cdot2,5=101,50\$$
$C_B(D)=7\cdot3+14\cdot9=147\$$

6) Réponse

L'emploi B offre un salaire maximal de 294$.



#8) 1) Variables

x : nb de porc

y : nb de sangliers

2) Inéquations

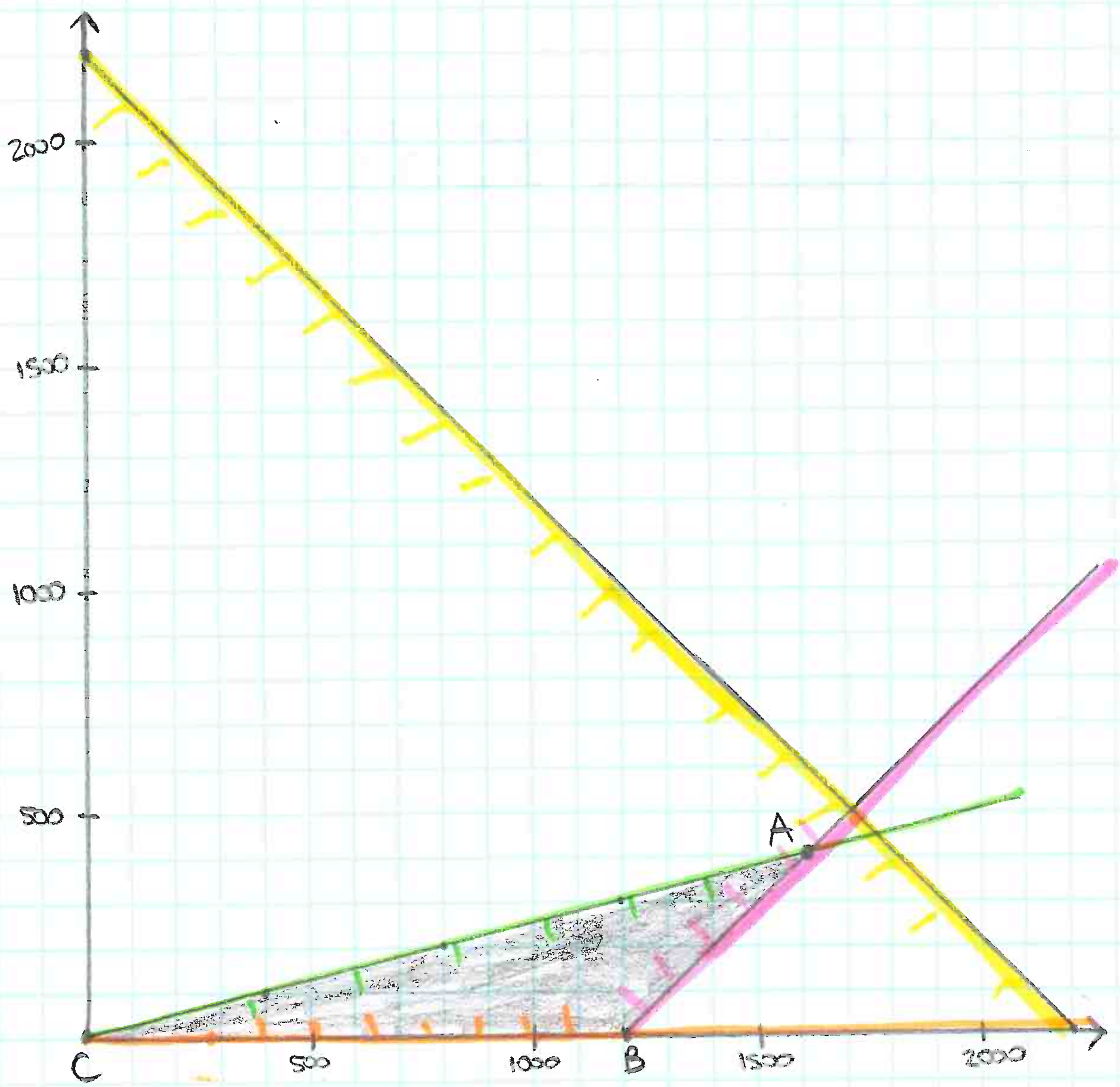
$x \geq 0$, $y \geq 0$

$x + y \leq 2200$

$x - y \leq 1200 \Leftrightarrow y \geq x - 1200$

$y \leq \frac{x}{4}$

3) Polygone de contraintes



4) Objectif

Maximiser les profits

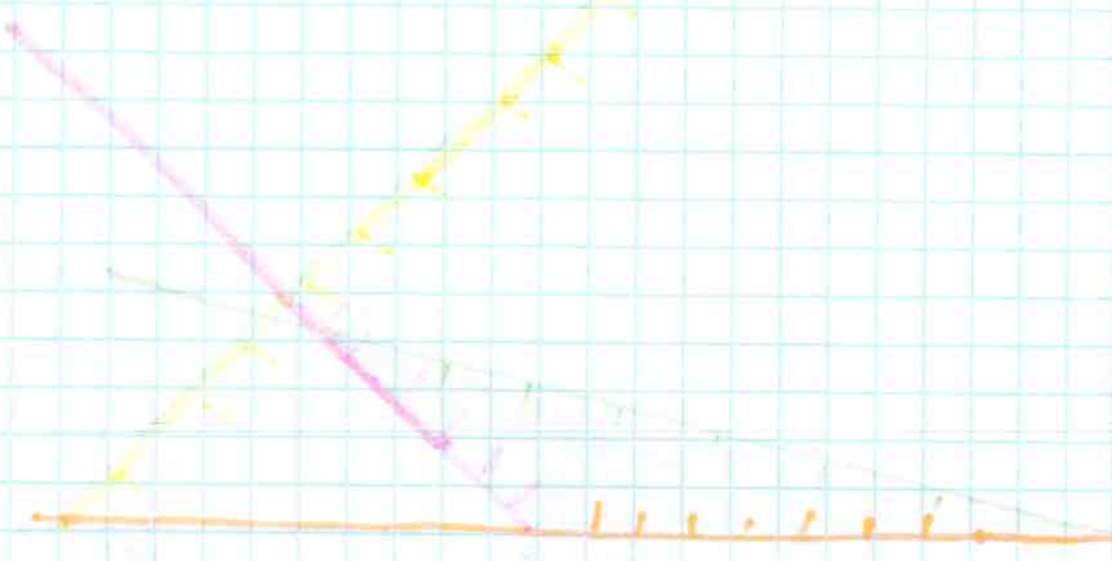
$P = 120x + 175y$

5) Sommets

A(1600, 400)	$P = 120 \cdot 1600 + 175 \cdot 400 = 262000\$$ *
B(1200, 0)	$P = 120 \cdot 1200 + 175 \cdot 0 = 144000\$$
C(0, 0)	$P = 120 \cdot 0 + 175 \cdot 0 = 0\$$

6) Réponse

Le producteur doit produire 1600 porcs et 400 sangliers pour un profit maximal de 262000$.



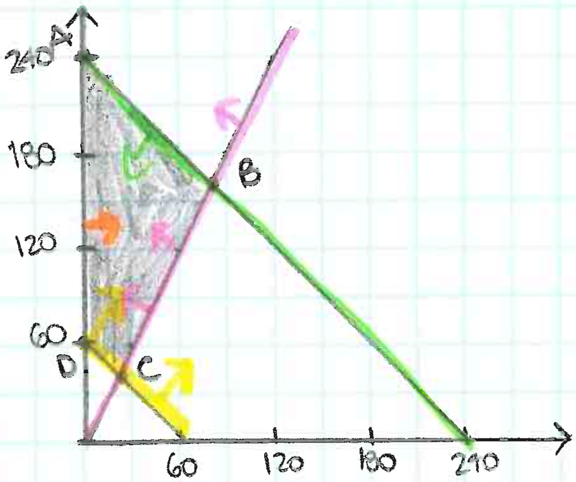
#9) 1) Variables

x : nb bouteilles marque maison
y : nb bouteilles marque nationale

2) Inéquations

$y \geq 0$, $x \geq 0$
$y \geq 2x$
$x + y \geq 60$
$x + y \leq 240$

3) Polygone de contraintes



4) Objectif

Maximiser le PROFIT

44% de 3,75\$ = 1,65\$
20% de 4,55\$ = 0,91\$

$P = 1{,}65x + 0{,}91y$

5) Sommets

A (0, 240)
B (80, 160)
C (20, 40)
D (0, 60)

$\boxed{B}$
$x + y = 240$
$x + 2x = 240$
$3x = 240$
$x = 80$
$y = 2x$
$y = 2 \cdot 80$
$y = 160$

$\boxed{C}$
$x + y = 60$
$x + 2x = 60$
$3x = 60$
$x = 20$
$y = 2x$
$y = 2 \cdot 20$
$y = 40$

$P(A) = 1{,}65 \cdot 0 + 0{,}91 \cdot 240 \quad 218{,}40\$$
$P(B) = 1{,}65 \cdot 80 + 0{,}91 \cdot 160 = 277{,}60\$$ *
$P(C) = 1{,}65 \cdot 20 + 0{,}91 \cdot 40 = 69{,}40\$$
$P(D) = 1{,}65 \cdot 0 + 0{,}91 \cdot 60 = 54{,}60\$$

$277{,}60\$ \cdot 52 = 14\,435\ \$$ (annuellement)

6) Réponse :

La pharmacienne doit vendre chaque semaine 80 bouteilles de marque maison et 160 bouteilles de marque nationale pour un profit annuel de 14 435 $.

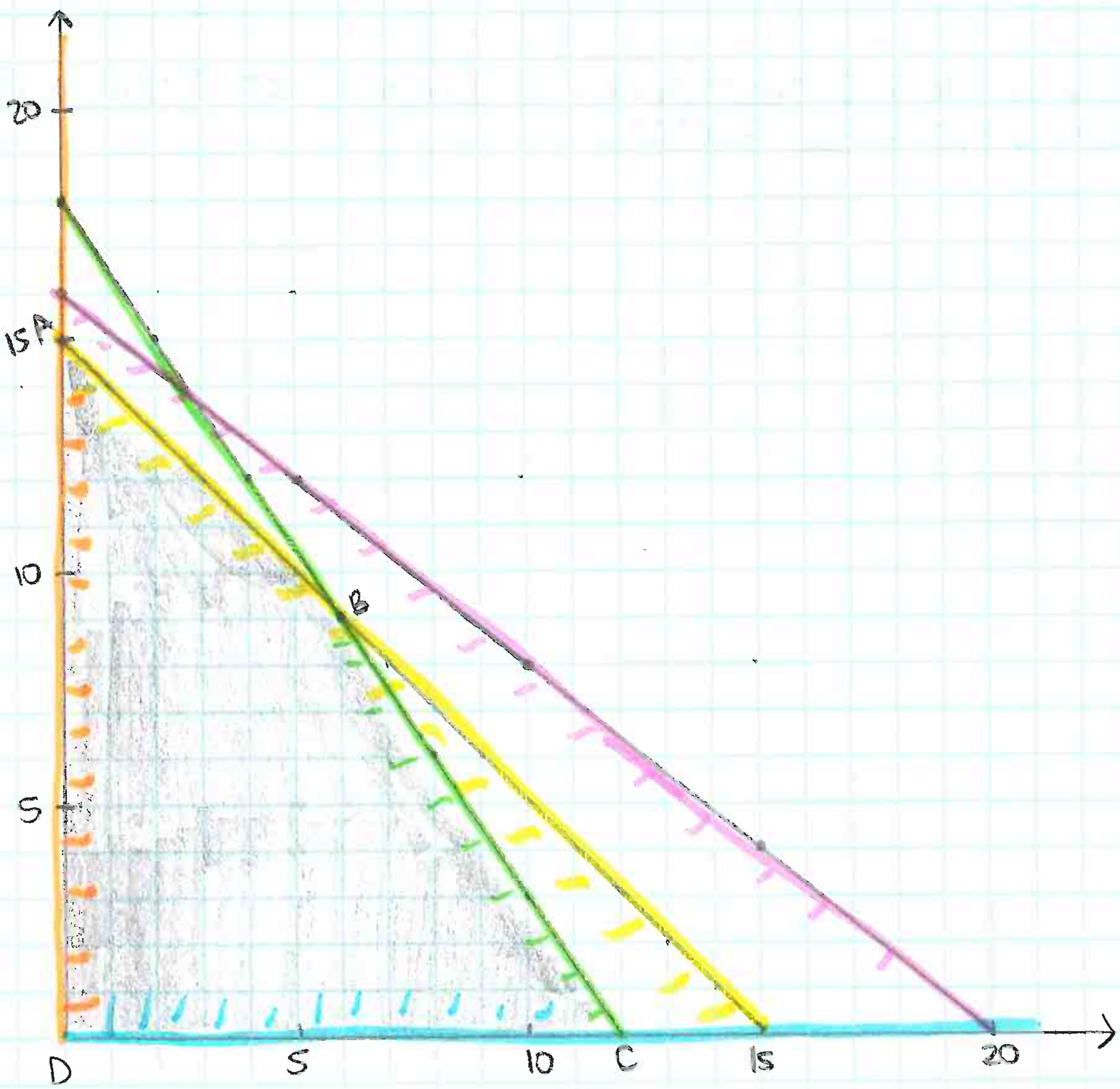
#10) 1) Variables

x : nb de complets
y : nb de tailleurs

2) Inéquations

$x \geq 0$, $y \geq 0$
$4x + 5y \leq 80 \Leftrightarrow y \leq -\frac{4}{5}x + 16$
$0{,}8x + 0{,}8y \leq 12 \Leftrightarrow y \leq -x + 15$
$24x + 16y \leq 288 \Leftrightarrow y \leq -\frac{3}{2}x + 18$

3) Polygone de contraintes



4) <u>Objectif</u>

Maximiser le revenu

$R = 500x + 450y$

5) <u>Sommets</u>

A (0, 15)	$R = 500 \cdot 0 + 450 \cdot 15 = 6750\$$
B (6, 9)	$R = 500 \cdot 6 + 450 \cdot 9 = 7050\$$ *
C (12, 0)	$R = 500 \cdot 12 + 450 \cdot 0 = 6000\$$
D (0, 0)	$R = 500 \cdot 0 + 450 \cdot 0 = 0$

6) <u>Réponse</u>

Le couturier doit confectionner 6 complets et 9 tailleurs pour un revenu de 7050$.