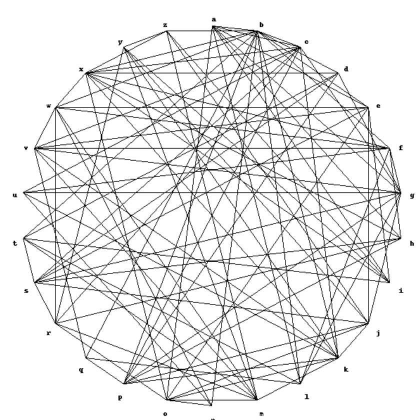
Chapitre 3
Graphes

NOTES DE COURS et EXERCICES
+
PROGRAMME LOCAL

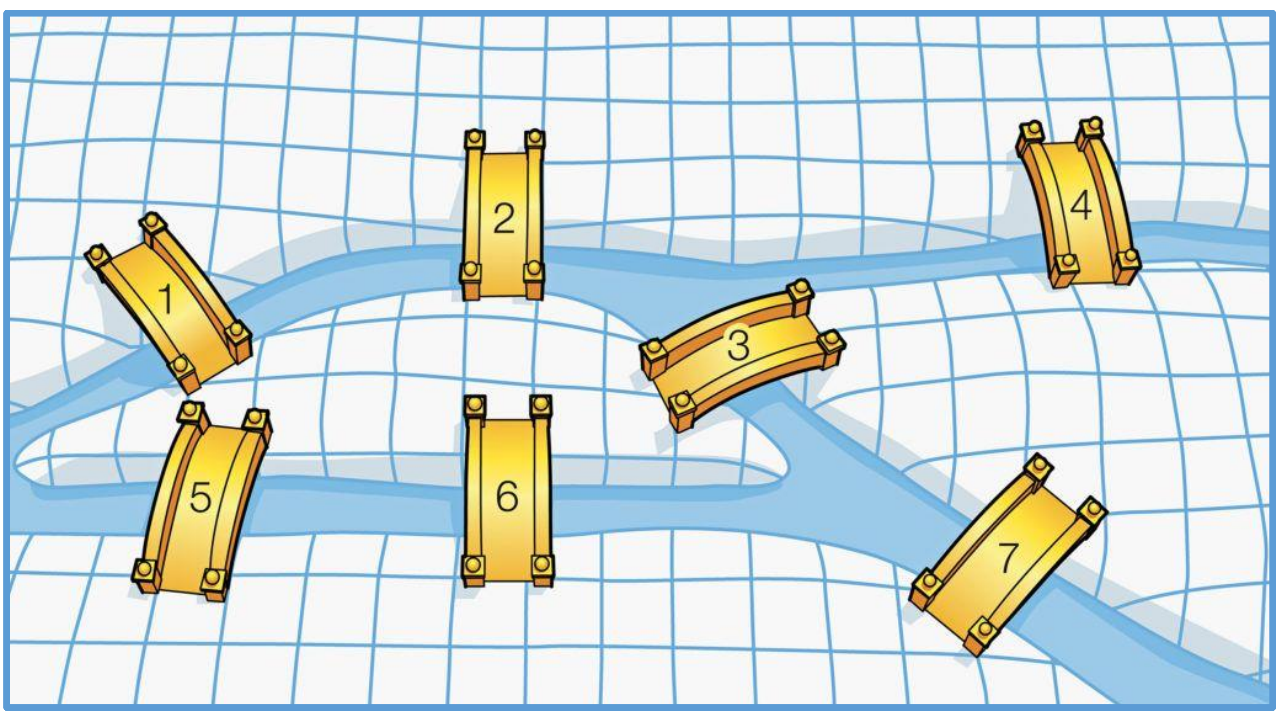
Mathématique CST5
Collège Regina Assumpta
2024 – 2025



Nom : ______________________________

Groupe : _____

Table des matières



NOTES DE COURS

Examen 1

CST – Compétence 2

+ Programme local

Graphes (vocabulaire)

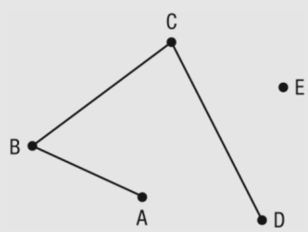
Un **graphe** correspond à un ensemble d'éléments et à un ensemble de liens entre ces éléments.
Dans la représentation graphique d'un graphe :

- les points, appelés sommets et identifiés par une lettre, un nombre ou un mot, correspondent aux éléments de l'ensemble;
- les lignes, appelées arêtes, correspondent aux liens qui existent entre ces éléments ;
- les arêtes sont généralement nommées à l'aide des lettres qui identifient ses extrémités dans n'importe quel ordre. Par exemple, l'arête A-B peut aussi s'écrire B-A ou même AB ou BA.

Exemples :

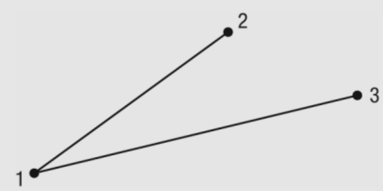
1) Dans le graphe ci-dessous :

- _______________ sont des sommets ;
- _______________ sont des arêtes.



2) Dans le graphe ci-dessous :

- __________ sont des sommets ;
- __________ sont des arêtes.

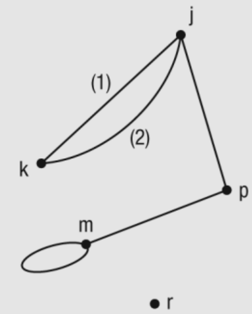


Voici différentes caractéristiques qui peuvent être associées à un graphe :

- L'**ordre** d'un graphe : ____
- Le **degré** d'un sommet : ______________________________________
____
- Deux sommets sont **adjacents** si : ________________________________
- Des arêtes sont **parallèles** si : __________________________________
____
- **Boucle** : ____

Ex. : Soit le graphe ci-contre :

- l'ordre du graphe est __ ;
- le sommet k est de degré __ ;
  et le sommet m est de degré __ ;
- les sommets m et p sont ________________ ;
- l'arête k(1)-j est ______________ à l'arête k(2)-j ;
- l'arête mm est une ___________.

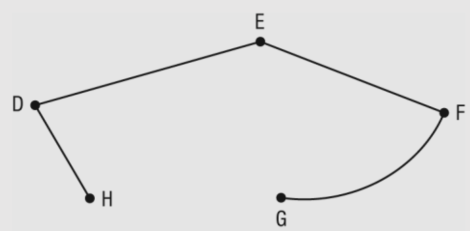


A) Graphe connexe

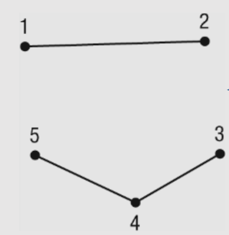
Un graphe est connexe si ____

____

Ex. : 1) Graphe connexe



2) Graphe non connexe



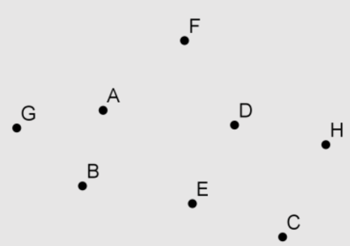
Il est impossible de passer par tous les sommets sans lever son crayon.

B) Graphe discret

Un graphe est discret si ____.

Donc, ____.

Ex. :



Graphe discret, car il ne comporte aucune arête.

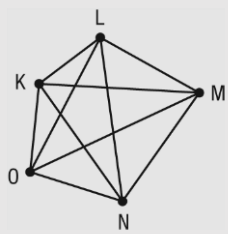
C) Graphe complet

Un graphe est complet si ____

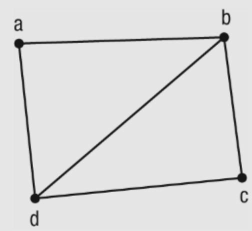
____.

____.

Ex. : 1) Graphe complet



2) Graphe non complet



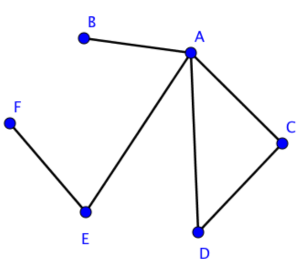
Les sommets _____ et _____ ne sont pas reliés directement.

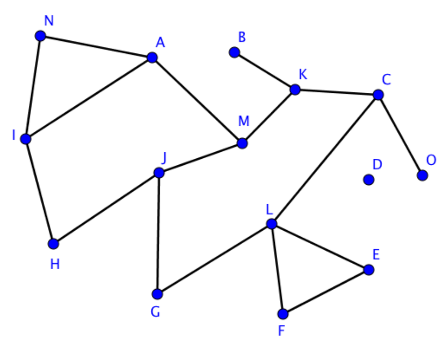
Pour trouver le nombre d'arêtes dans un graphe complet, il suffit d'utiliser la formule suivante :

Nombre d'arêtes = ________________

où n représente le nombre de sommets.

Exercice 1 : Combien d'arêtes manque-t-il à ces graphes pour qu'ils soient complets?





Exercice 2 :

Voici des renseignements qui concernent un groupe de huit personnes.

- Chaque personne connaît au plus 2 autres personnes.
- Noémie connaît Julie et Étienne.
- Daniel connaît Olivier et Martine.
- Alyson ne connaît qu'Olivier.
- Chaque fille ne connaît qu'un seul garçon du groupe.
- Frank connaît une seule personne du groupe.

a) Tracez un graphe qui représente cette situation et dans lequel une arête représente deux personnes qui se connaissent.

b) En supposant que deux personnes se communiquent une information seulement si elles se connaissent, est-il possible de donner une consigne à Martine et que l'ensemble du groupe en soit informé ? Expliquez votre réponse.

Chaîne et cycle

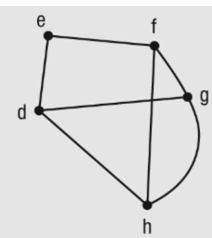
A) Chaîne

Dans un graphe, on établit une **chaîne** lorsqu'on passe d'un sommet à un autre en suivant des arêtes.

- La **longueur** d'une chaîne correspond ______________________________________
  ____.
- La **distance** entre deux sommets A et B, notée ________, correspond ____________
  ____
  ____.

Ex. : Dans le graphe ci-contre :

- d-e-f et efghgd sont des ______________ ;
- fgdhe n'est pas une chaîne ;
- la longueur de la chaîne d-g-f-e est __
  et celle de la chaîne gdedgh est __ ;
- d(f, h) = __ et d(h, e) = __.

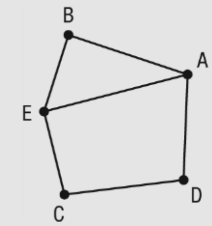


Longueur =
Nombre de sommets – 1

B) Cycle

Dans un graphe, un **cycle** correspond ____
____.

Ex. : Dans le graphe ci-contre :



- A-B-E-C-D-A et DCEBEAD sont des ____________.
- A-D-C-E-A-B n'est pas un cycle, car _________________

  ____

- ACEA n'est pas un cycle, car _______________________

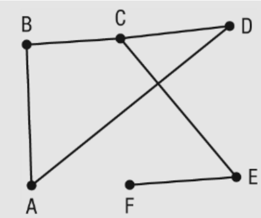
  ____

C) Chaîne simple et cycle simple

Une chaîne est dite simple s'il n'y a pas de répétition d'arêtes.

Un cycle est dit simple s'il n'y a pas de répétition d'arêtes.

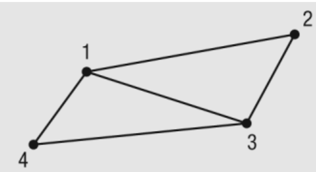
Ex. : Dans le graphe ci-contre, _______________________ et _____________________________ sont des **chaînes simples**.



Ex. : Dans le graphe ci-contre, 2-3-1-2 est un **cycle simple**.

On peut aussi dire que c'est **une chaîne simple**,

un **cycle** et une **chaîne**.



D) Chaîne eulérienne et cycle eulérien

Exemple :

La ville de Trois-Rivières a été baptisée en 1599 par le géographe Dupont-Gravé, capitaine d'un des deux navires qui participaient à une expédition de l'explorateur Samuel de Champlain. En naviguant sur le fleuve Saint-Laurent, le capitaine crut que la ville était située à l'embouchure de trois rivières qui se jetaient dans le fleuve Saint-Laurent.

En réalité, il ne s'agissait pas de l'embouchure de trois rivières, mais de l'embouchure de trois chenaux de la rivière Saint-Maurice. La carte ci-contre montre ces trois chenaux.

a) Représente cette situation (cinq zones et six ponts) à l'aide d'un graphe et indique le degré de chaque sommet.

b) Peut-on visiter les cinq zones de la ville en passant une seule fois par chacun des ponts? Si oui, comment?

c) Quelle est la particularité du degré des sommets de départ et d'arrivée?

d) Est-il possible de trouver un trajet se commençant et se terminant au même endroit et qui ne passe pas plus d'une fois par chacun des ponts? Si non, ajoute une arête te permettant de le trouver (sur le graphe en **a**), mais d'une couleur différente.

e) Que remarques-tu à propos du degré des sommets du graphe modifié en **d**?

Une **chaîne eulérienne** est une chaîne qui emprunte **<u>une seule fois toutes les arêtes</u>** d'un graphe connexe sans répéter d'arête.

Pour vérifier rapidement si une chaîne eulérienne existe dans le graphe, on doit regarder si

____

____

Un **cycle eulérien** est une chaîne eulérienne qui commence et se termine en un même sommet.

Pour vérifier rapidement si un cycle eulérien existe dans le graphe, on doit regarder si

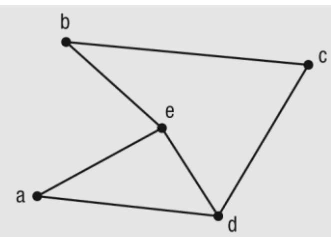
____

____

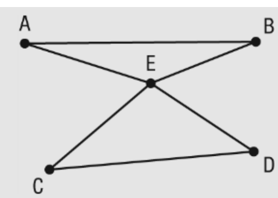
Ex. : Dans le graphe ci-contre, ______________________ est une chaîne eulérienne.

Un cycle eulérien n'existe pas, car ___________________

____.



Ex. : Dans le graphe ci-contre, ___________________________ est un cycle eulérien.



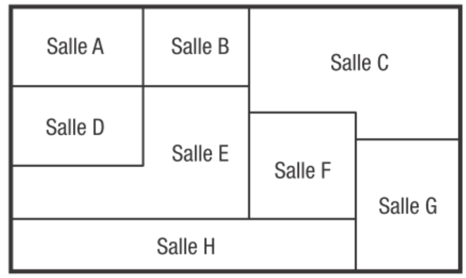
Une application (disponible sur Android, iOs, Microsoft Store) pour pratiquer les chaînes eulériennes et les cycles eulériens.

One Touch Drawing ou ***One Touch Draw ~***

E) Chaîne hamiltonienne et cycle hamiltonien

Exemple :

Le plan ci-contre montre la disposition des salles dans un musée. Deux salles adjacentes sont reliées par une porte. Chaque mur de chacune des salles peut être déplacé afin d'agrandir ou de réduire la superficie de la salle.



a) Représentez cette situation par un graphe où les sommets correspondent aux salles et les arêtes, aux portes qui relient les salles.

b) Est-il possible qu'un visiteur commence et termine sa visite à la salle A et passe une seule fois par chacune des autres salles ? Expliquez votre réponse.

____

c) On veut modifier le plan du musée de manière à ce qu'il soit possible d'emprunter une seule fois chacune des portes. Proposez une nouvelle façon de disposer les salles.

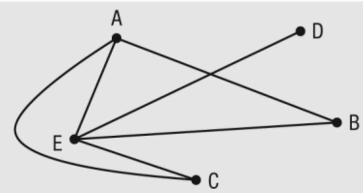
____

____

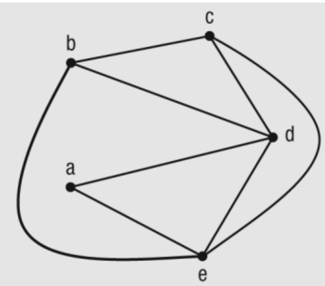
Une **chaîne hamiltonienne** est une chaîne simple qui emprunte une seule fois **<u>tous les sommets</u>** d'un graphe connexe.

Un **cycle hamiltonien** est un cycle simple qui emprunte une seule fois **<u>tous les sommets</u>** d'un graphe connexe, à l'exception du sommet final (qui est le même que le sommet initial).

Ex. : Dans le graphe ci-contre, ____________________ est une chaîne hamiltonienne.



Ex. : Dans le graphe ci-contre, __________________ est un cycle hamiltonien.



Remarques :

1) Un graphe qui a un sommet **<u>de degré 1</u>** n'admet pas de cycle hamiltonien.

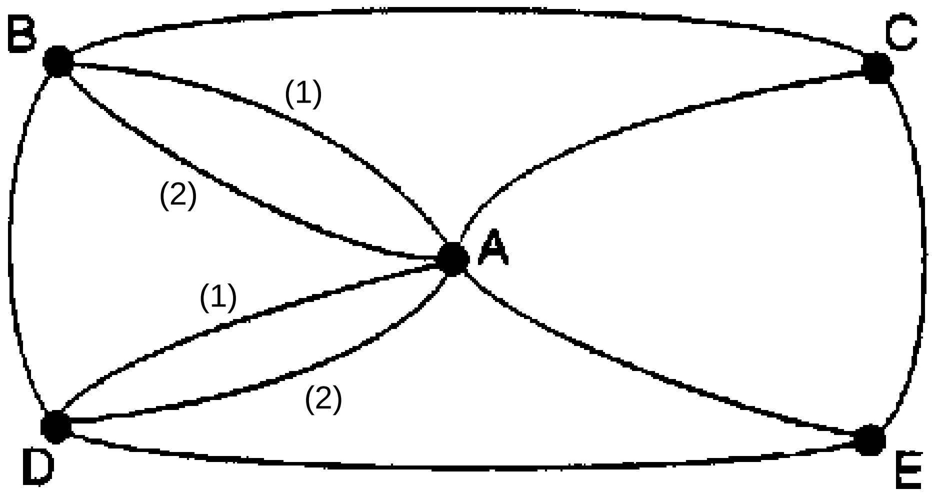
2) Un graphe **<u>complet</u>** admet toujours un cycle hamiltonien.

3) Un graphe connexe d'ordre n (avec $n \geq 3$) possède un cycle hamiltonien si le degré de chaque sommet est plus grand ou égal à $\frac{n}{2}$.

Pour un graphe qui ne correspond à aucune des trois situations précédentes, on utilise la méthode « essai-erreur » pour déterminer si le graphe admet ou non une chaîne hamiltonienne ou un cycle hamiltonien.

Exercice :

Voici le plan d'un quartier, où les arêtes représentent les rues et les sommets représentent les intersections.



a) La municipalité doit faire la vérification des feux de circulation aux intersections A, B, C, D et E. Détermine un itinéraire qui permettrait de faire ce travail efficacement en passant une seule fois par chaque intersection.

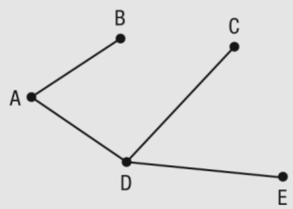
b) Une autre équipe doit vérifier tous les lampadaires du quartier. Il y en a plusieurs sur chaque rue. Détermine un itinéraire qui permettrait de faire ce travail efficacement en passant une seule fois par chaque rue.

Types de graphes

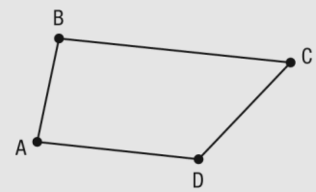
A) Arbre

Un arbre est un graphe **connexe** qui ne comporte aucun **cycle simple**.

Ex. : 1) Le graphe suivant est un arbre.



2) Le graphe suivant n'est pas un arbre puisque _________ est un cycle simple.



Quelle(s) arête(s) faut-il enlever pour que le graphe devienne un arbre?

____

B) Graphe orienté

Un graphe orienté est un graphe dans lequel un **sens** est attribué à chacune des arêtes à l'aide d'une flèche. Ces arêtes sont appelées des **arcs**. Dans un graphe orienté :

- un **chemin** (au lieu de *chaîne*) est ____
  ____
- un **circuit** (au lieu de *cycle*) est ____
  ____
- un chemin ou un circuit est **simple** si ____________________________________
  ____

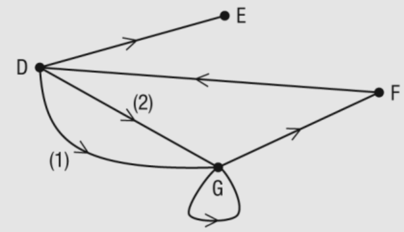
ATTENTION À LA NOTATION :

L'arc A-B commence au sommet A et se termine au sommet B.

L'arc B-A commence au sommet B et se termine au sommet A.

Pour une arête, le sens de la notation n'est pas important.

Ex. : Dans le graphe orienté ci-contre :



- D-E, F-D et G-F sont des ________ ;
- F-D-E est un ____________ ;
- G-F-D(1)-G est un ______________ ;
- D-F n'<u>existe</u> pas.

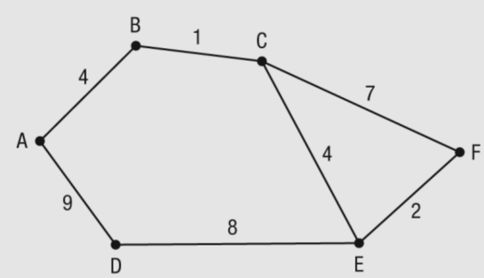
C) Graphe valué

Définition : Un graphe valué est ____

____.

Dans un graphe valué, la valeur d'un chemin ou d'une chaîne correspond à la somme des valeurs des arcs ou des arêtes qui forment ce chemin ou cette chaîne.

Ex. : Dans le graphe valué ci-contre :



- la valeur de l'arête C-E est ____ ;
- la valeur de la chaîne ADEC est ___________________ ;
- la longueur de la chaîne ADEC est ____ ;
- d(A, C) = ____ ;
- la chaîne de valeur minimale entre A et C est ____________ et sa valeur est ____.

<u>ATTENTION!</u>
Il ne faut pas confondre le mot « distance » du langage courant avec le concept de distance dans un graphe…

Exercice :

Dans une usine, la production d'un objet requiert 10 étapes qui sont effectuées successivement ou simultanément, selon les étapes préalables. Le tableau ci-dessous présente l'ensemble de ces étapes.

Étape	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Étapes préalables	Aucune	A et C	A	B et C	C	D	D	E, F et G	E	H et I

a) Représente cette situation à l'aide d'un graphe orienté.

b) Détermine la longueur du chemin :

1) le plus court qui relie les étapes A à J.

2) le plus long qui relie les étapes A à J.

Somme des degrés des sommets

La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale au double du nombre d'arêtes.

S : somme des degrés de tous les sommets
a : nombre d'arêtes

$$\boldsymbol{S = 2a}$$

Le nombre de sommets de degré impair dans un graphe est un nombre pair.

Rappel : Un graphe complet de *n* sommets possède $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes (voir page 6).

Exercices :

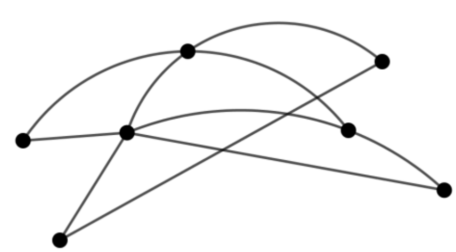
1. Un graphe possède 12 arêtes. Quelle est la somme des degrés de tous les sommets?

2. La somme des degrés des sommets d'un graphe est 48. Combien ce graphe possède-t-il d'arêtes?

3. Combien y a-t-il d'arêtes dans un graphe de 8 sommets dont le degré de chacun est 5?

4. Est-il possible d'avoir un graphe de 13 sommets de degré 5 chacun?

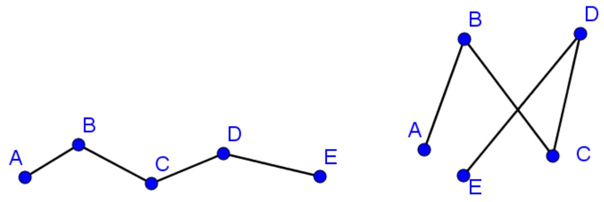
5. Combien d'arêtes manque-t-il au graphe ci-contre pour qu'il soit complet?



Graphes isomorphes

Deux graphes sont isomorphes si ____.

Les deux graphes ci-dessous sont isomorphes :



Petits trucs rapides : Deux graphes isomorphes auront toujours…

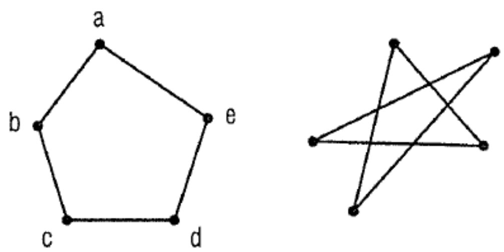
- ____
- ____
- ____

Pour <u>démontrer</u> que deux graphes sont isomorphes, il est possible d'utiliser une table des sommets adjacents.

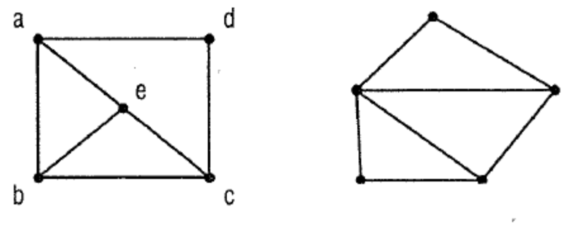
Exercice : Dans chacun des cas suivants, on propose deux graphes.

i. Détermine si les graphes sont isomorphes.
ii. Dans l'affirmative, nomme les sommets du graphe muet.

a)



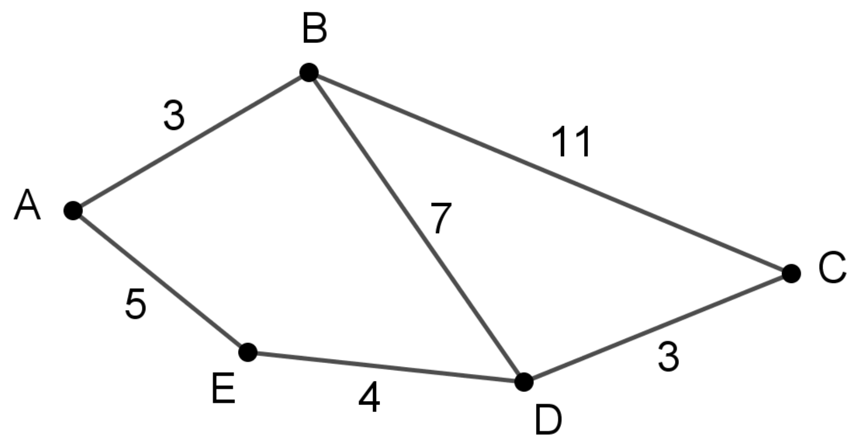
b)



Chaîne (ou chemin) de valeur minimale

Exemple :

Dans le graphe suivant, chaque sommet correspond à une halte et la valeur associée à une arête indique la longueur (en km) d'un sentier de randonnée pédestre. Quelle est la distance minimale à parcourir pour rallier les haltes A et C?



Trajets (chaînes) possibles et valeurs de chaque chaîne :

Réponse : la distance minimale à parcourir pour rallier les haltes A et C est de __________ km

en empruntant le trajet associé à la chaîne _______________________.

Note :

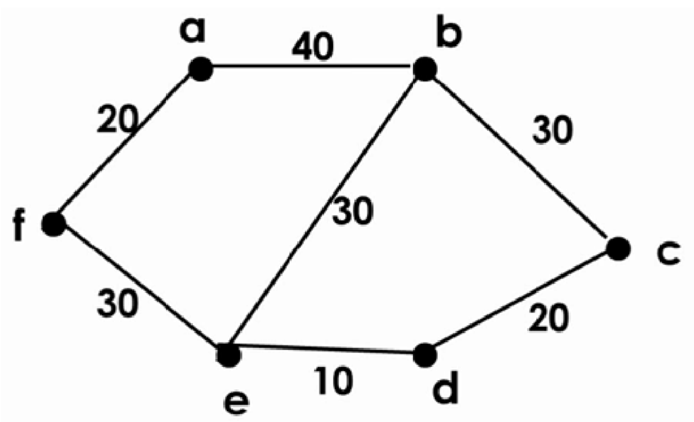
La méthode utilisée ci-dessus est pratique pour un petit graphe, mais on aura besoin d'une méthode plus performante pour un graphe complexe (voir page suivante).

Edsger Wybe Dijkstra (1930-2002) est un mathématicien et informaticien néerlandais. Il s'engage dès 1955 dans le domaine de l'informatique alors naissante, dont il est l'un des pionniers les plus éclairés. Parmi ses contributions se trouve un algorithme de calcul du chemin de valeur minimale dans les graphes, connu sous le nom d'**algorithme de Dijkstra**.

Voir l'animation en neuf étapes sur la page ***Wikipedia*** traitant de l'algorithme de Dijkstra.

Exercice : Dans chacun des graphes suivants, utilise l'algorithme de Dijkstra pour déterminer la chaîne de valeur minimale entre les sommets donnés, puis indique sa valeur.

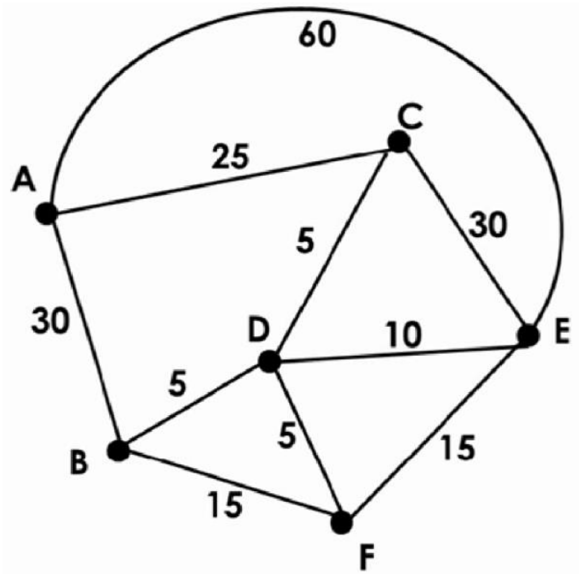
a)



Chaîne de valeur minimale entre **a** et **d** :

Valeur de la chaîne :

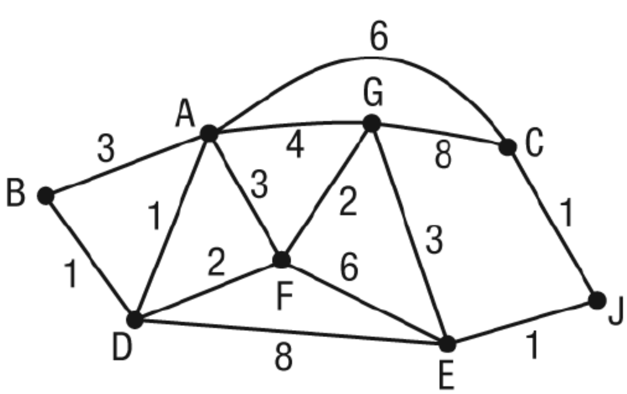
b)



Chaîne de valeur minimale entre **A** et **E** :

Valeur de la chaîne :

c)



Chaîne de valeur minimale entre **B** et **J** :

Valeur de la chaîne :

NOTES DE COURS

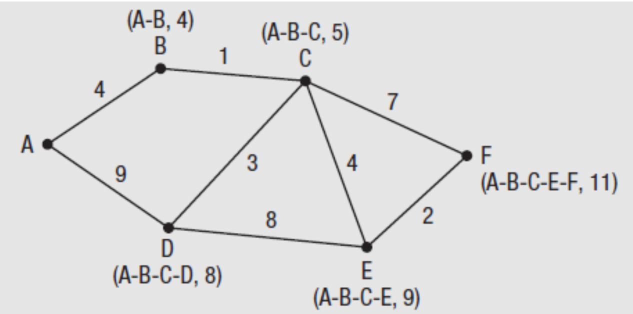
Examen 2

CST – Compétence 1

Chaîne de valeur minimale (rappel)

Il est possible de déterminer la chaîne de valeur minimale qui relie deux sommets d'un graphe en inscrivant sur chaque sommet la chaîne de valeur minimale qui aboutit au sommet initial ainsi que sa valeur (voir page 21).

Exemple : Dans le graphe ci-dessous, le sommet initial est A et le sommet final est F.



La chaîne de valeur minimale est A-B-C-E-F et sa valeur est 11.

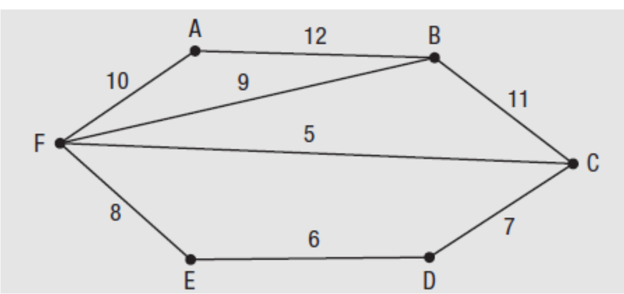
Arbre de valeurs minimales ou maximales

Il est possible de déterminer l'arbre de valeurs minimales ou maximales d'un graphe de la façon suivante.

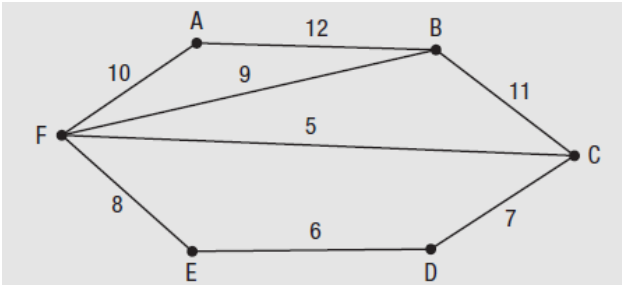
1. Sélectionner l'arête de plus petite (ou de plus grande) valeur.
2. Parmi les arêtes restantes, sélectionner celle qui a la plus petite (ou la plus grande) valeur.
3. Répéter l'étape précédente jusqu'à ce que tous les sommets soient reliés (directement ou indirectement) sans obtenir de cycle.

Exercices :

1. On veut déterminer l'arbre de valeurs minimales du graphe suivant.

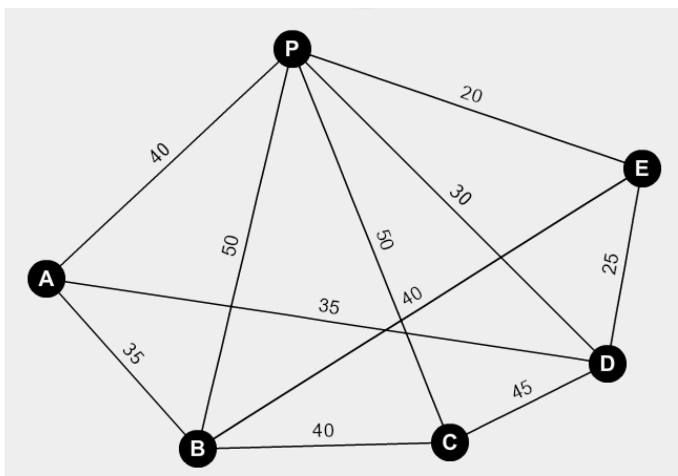


2. On veut déterminer l'arbre de valeurs <u>maximales</u> du graphe suivant.



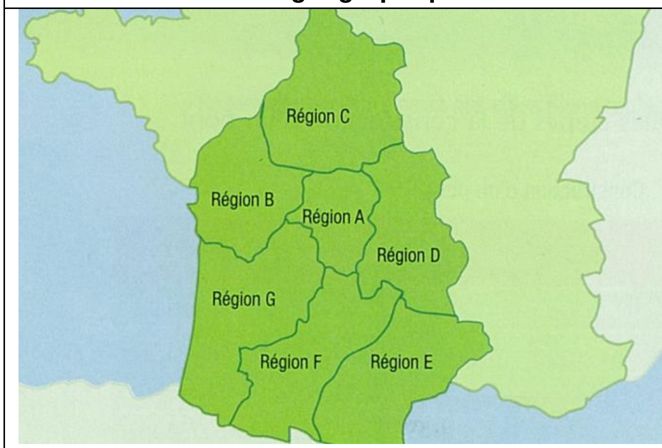
3. Un promoteur immobilier souhaite installer un système de canalisation reliant les cinq maisons du nouveau développement au puits (P) existant. Dans le graphe suivant, les canalisations possibles sont représentées par des arêtes et les maisons sont représentées par les sommets A, B, C, D et E. La valeur de chaque arête correspond au coût d'installation (en centaines de dollars) de chaque canalisation.

   Afin que toutes les maisons soient reliées, directement ou non, au puits, combien de canalisations le promoteur doit-il envisager? Combien coutera cette installation?



<u>Nombre chromatique</u>

Exemple : On désire colorier une partie de la carte de la France ci-dessous à l'aide d'un <u>minimum</u> de couleurs de façon à ce que deux régions ayant une frontière commune soient de couleurs différentes.

Carte géographique	**Graphe**
	

a) Si la région B est coloriée en rouge, peut-on aussi colorier en rouge :

1) la région A ?
2) la région C ?
3) la région D ?
4) la région E ?
5) la région F ?
6) les régions D et E ?
7) les régions D ou E ?
8) les régions D et E et F ?
9) les régions D ou E ou F ?

b) À droite de la carte ci-dessus, représente la situation par un graphe dans lequel les sommets représentent les régions de la France et les arêtes, les liens frontaliers.

c) Attribue une couleur à chaque sommet du graphe en t'assurant que deux sommets adjacents ne sont pas de la même couleur et que le nombre total de couleurs est minimal.

d) Que peut-on dire de la couleur associée à deux sommets :

1) reliés directement?

2) reliés indirectement?

e) Quel est le nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorier cette carte?

f) Pour le plaisir, colorie la carte de cette partie de la France.

Le **nombre chromatique** est le nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorier tous les sommets d'un graphe dans lequel deux sommets adjacents ne sont pas de la même couleur.

Voici la méthode pour colorier un graphe à l'aide d'un nombre minimal de couleurs :

1. ____

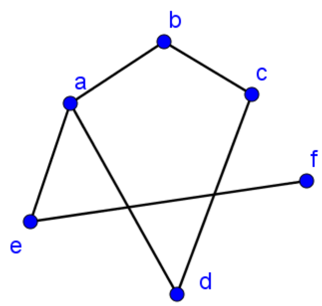
2. ____

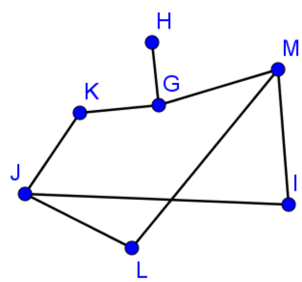
   ____

3. ____

   ____

Exercice 1 : Détermine le nombre chromatique des graphes suivants.



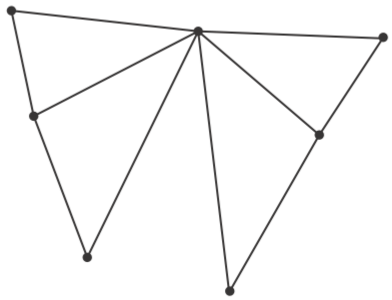


Exercice 2 : Gaston doit créer des groupes pour une activité. Il a la liste des incompatibilités entre les personnes. Suggère une liste de groupes.

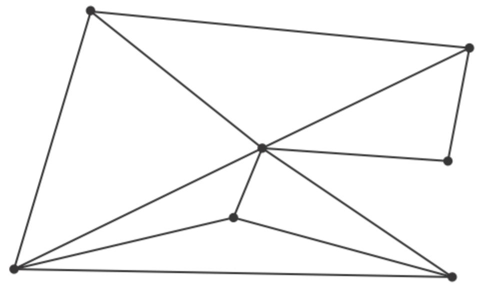
Personnes	**Incompatibilités**
Ariane	Bertrand, Diane
Bertrand	Ariane, Caroline, Diane
Caroline	Bertrand, Fabien
Diane	Ariane, Bertrand, Etienne, Fabien
Etienne	Diane, Fabien
Fabien	Caroline, Diane, Etienne

Exercice 3 : Détermine le nombre chromatique de chacun des graphes suivants.

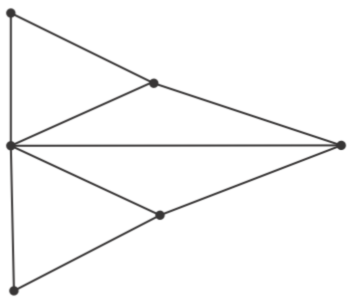
a)



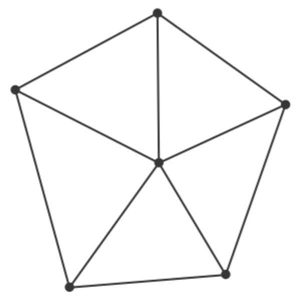
b)



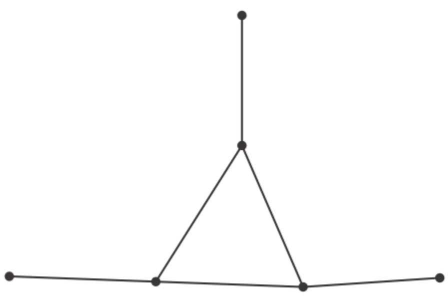
c)



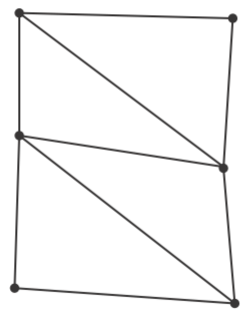
d)



e)



f)



Exercice 4 :

Le tableau suivant présente les incompatibilités entre cinq fromages qu'Elliot dispose sur des plateaux pour une réception. Dans ce tableau, un crochet représente une incompatibilité entre deux fromages.

	Capricieux	Chez nous	Fin palais	Sourbin	Délice d'ici
Capricieux		√		√	√
Chez nous	√		√		√
Fin palais		√			√
Sourbin	√				
Délice d'ici	√	√	√		

Elliot souhaite minimiser le nombre de plateaux pour le service. Au pire, il y aura cinq plateaux, mais il peut sans doute faire mieux…

a) Représente cette situation à l'aide d'un graphe et colorie les sommets.

b) Quel est le nombre minimal de plateaux?

c) Quels fromages Elliot devrait-il disposer sur chaque plateau ?

Chemin critique

Exemple 1 : Voici l'ensemble des dix tâches à effectuer pour réparer un véhicule accidenté.

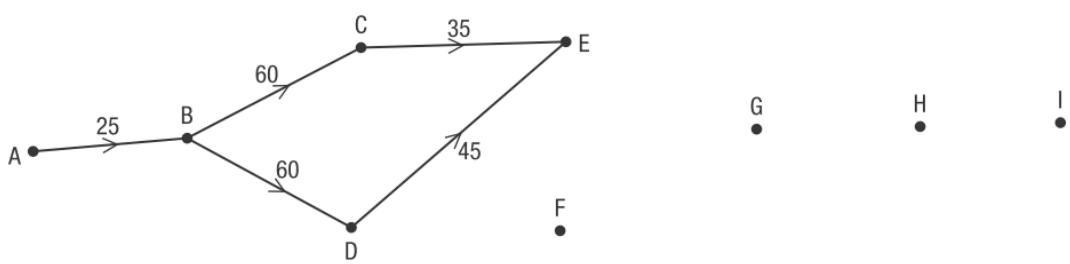
- Préparation du devis (1 jour)
- Livraison des pièces neuves (6 jours)
- Réparation des pièces réutilisables du véhicule (4 jours)
- Peinture des pièces réutilisables et des pièces neuves (1 jour)
- Séchage des pièces réutilisables et des pièces neuves (2 jours)
- Réparation de la mécanique du véhicule (3 jours)
- Assemblage final du véhicule (2 jours)
- Essai routier à la suite des réparations (1 jour)
- Inspection par un agent agréé (1 jour)
- Nettoyage du véhicule (1 jour)

Explique comment un garagiste peut réparer ce véhicule en 16 jours.

Exemple 2 : Le tableau suivant présente les principales étapes de la construction d'un pont.

Étape	Description	Temps de réalisation (jours)	Étapes préalables
A	Analyse des besoins	25	Aucune
B	Élaboration des plans	60	A
C	Fabrication du tablier en usine	35	B
D	Travaux de fondation	45	B
E	Installation du tablier	15	C et D
F	Réalisation des approches du pont	20	D
G	Travaux de pavage	3	E et F
H	Vérification de la conformité des travaux	4	G
I	Fin des travaux	Aucun	H

a) Complète le graphe ci-dessous qui représente cette situation.



b) Pourquoi ce graphe est-il orienté?

c) Que signifient les nombres sur les arcs du graphe?

d) D'après le contexte, explique pourquoi les chemins B-C-E et B-D-E sont parallèles.

e) Énumère tous les chemins qui relient le sommet A au sommet I.

f) Quel est le chemin dont la valeur est maximale?

g) Quelle est cette valeur et à quoi correspond-elle dans le contexte?

Dans un graphe, un **chemin critique** correspond à un chemin simple de valeur

________________. Les chemins critiques sont utilisés pour ______________________

____

____.

Pour représenter une telle situation, on doit tenir compte : ________________________

____.

Exercice 1 :

Démarrage d'une entreprise

Étape	Description	Temps de réalisation (jours)	Étapes préalables
A	Préparation du plan d'affaires	30	Aucune
B	Réalisation d'une étude de marché	10	A
C	Recherche de partenaires	25	A
D	Recherche d'un local	20	A
E	Analyse de l'étude de marché	5	B
F	Évaluation d'un système de distribution des produits	15	C et D
G	Recherche de financement	35	E et F
H	Démarrage de l'entreprise	Aucun	G

Représentez l'ensemble des étapes associées au démarrage de cette entreprise par un graphe où :

- Chaque sommet correspond à une étape;
- Les chemins parallèles sont associés à des étapes qui peuvent être réalisées simultanément;
- Le nombre inscrit sur chaque arc correspond au temps de réalisation de l'étape qui est à l'origine de l'arc.

Il est possible de déterminer le temps minimal requis pour démarrer cette entreprise en évaluant la valeur du chemin critique associé à cette situation.

Exercice 2 : Une compagnie veut produire et diffuser le nouveau livre d'un auteur célèbre. Ce dernier vient de terminer l'écriture de son manuscrit. Voici les étapes permettant la réalisation du livre:

Création d'un livre

Étape	Description	Temps de réalisation (jours)	Étapes préalables
A	Saisie des textes dans le logiciel d'édition	15	Aucune
B	Conception de la page couverture	5	Aucune
C	Graphisme et illustrations	15	Aucune
D	Montage des textes et des illustrations	10	A et C
E	Correction 1re épreuve	10	D
F	Correction 2^{e} épreuve	5	E
G	Correction 3^{e} épreuve	3	F
H	Assemblage des pages du livre	5	B et G
I	Impression du livre	10	H
J	Conception et production d'un texte publicitaire	10	B
K	Diffusion de la publicité	5	J
L	Diffusion du livre	5	I et K

a) Dans combien de jours le livre sera sur les tablettes?

(suite au verso) →

b) La publicité créée par l’agence publicitaire ne satisfait pas aux exigences de la compagnie de production. Elle demande des modifications à la publicité, ce qui double le temps de réalisation de cette étape. Cette demande aura-t-elle un effet sur la durée totale de production du livre?

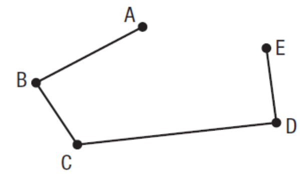
c) Malheureusement, un problème survient lors de la saisie informatique des textes dans le logiciel d’édition et le temps de réalisation de cette étape est augmenté de 6 jours. Ce problème aura-t-il un effet sur la durée totale de production du livre?

EXERCICES

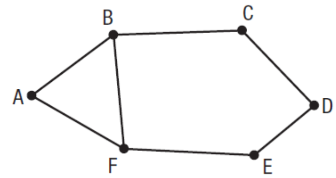
(Examen 1)

1. Dans chacun des graphes, nommez une chaîne eulérienne.

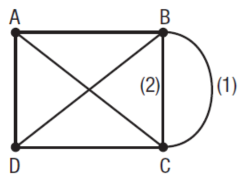
a)



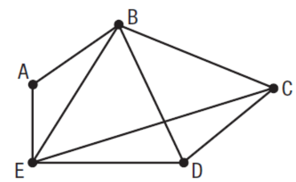
b)



c)

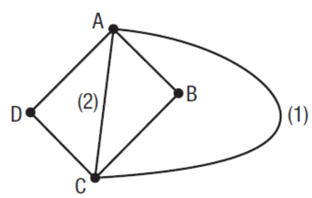


d)

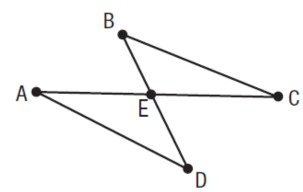


2. Dans chacun des graphes, nommez un cycle eulérien.

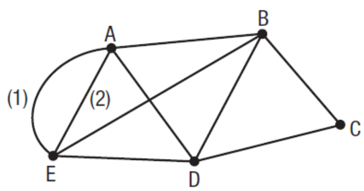
a)



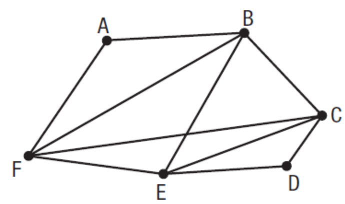
b)



c)

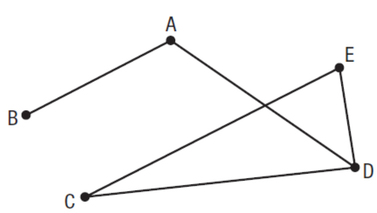


d)

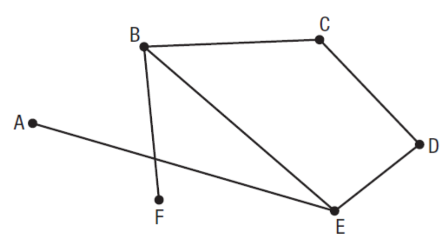


3. Dans chacun des graphes, nommez une chaîne hamiltonienne.

a)

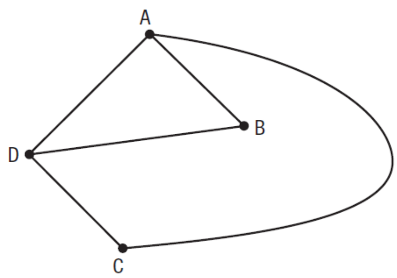


b)

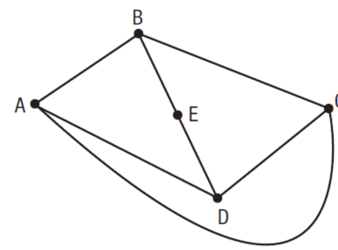


4. Dans chacun des graphes, nommez un cycle hamiltonien.

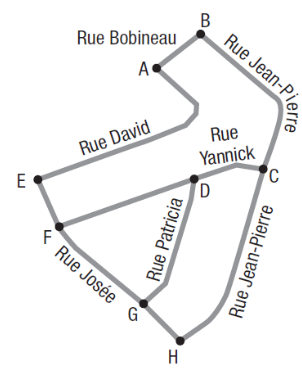
a)



b)



5. Jonas vend du chocolat noir pour financer ses activités parascolaires. Il découpe la carte de son quartier, sur laquelle il place des points aux intersections de chaque rue.

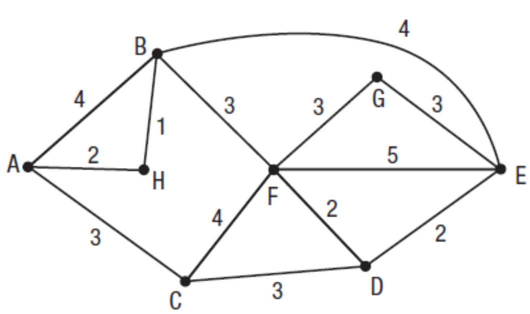


a) Est-il possible pour Jonas d'emprunter une seule fois toutes les rues de ce quartier? Expliquez votre réponse.

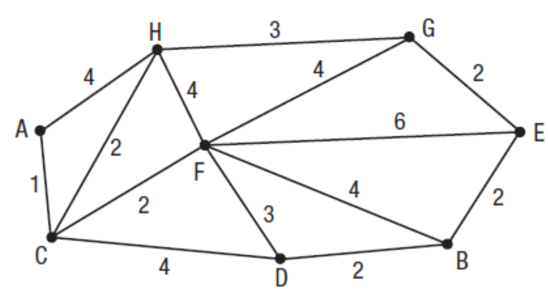
b) Jonas se trouve à l'intersection H. Il estime que lorsqu'il aura passé une seule fois par chacune des intersections et qu'il retournera à son point de départ, il aura vendu tout son chocolat. Déterminez, si possible, un itinéraire qui correspond à cette description.

6. Pour chacun des graphes, déterminez la valeur minimale de la chaîne qui relie le sommet A au sommet E.

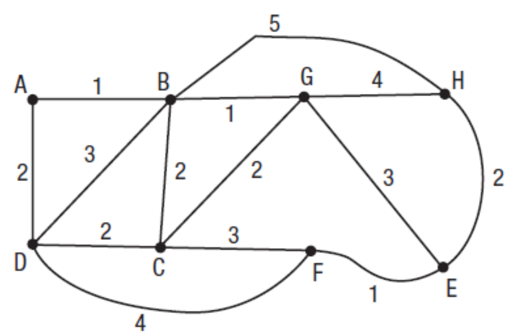
a)



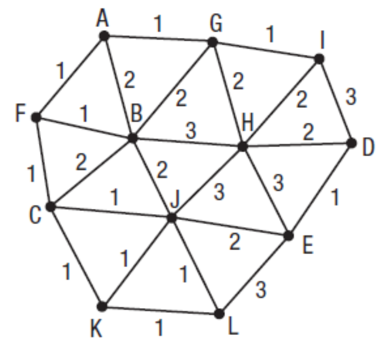
b)



c)



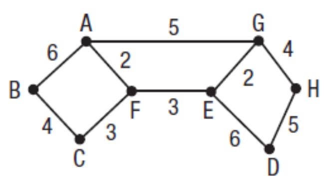
d)



7. Pour chacun des graphes ci-dessous, représentez :

1) l'arbre de valeurs minimales 2) l'arbre de valeurs maximales

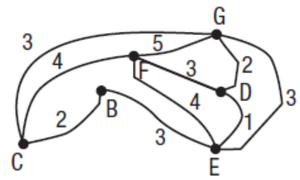
a)



1)

2)

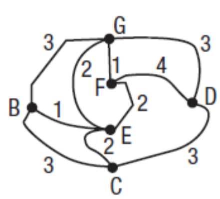
b)



1)

2)

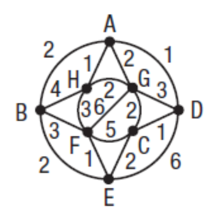
c)



1)

2)

d)

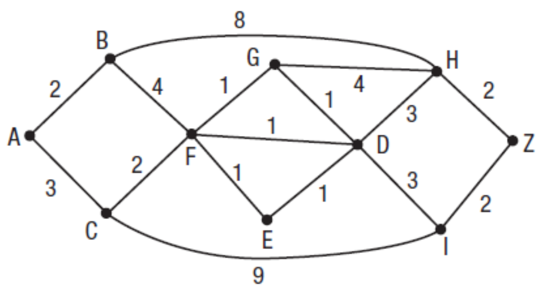


1)

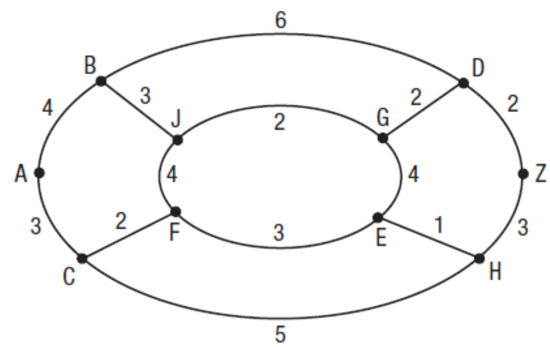
2)

8. Pour chacun des graphes, déterminez la chaîne de valeur minimale qui relie le sommet A au sommet Z.

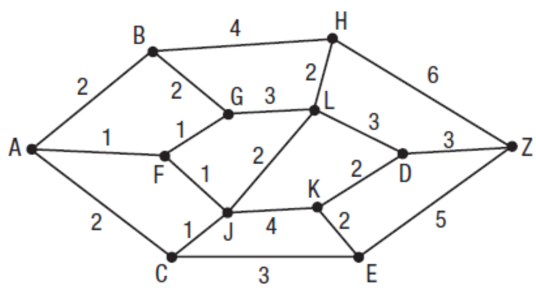
a)



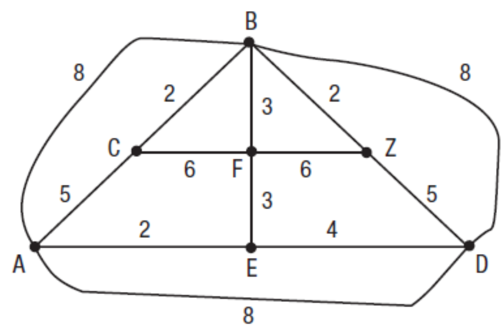
b)



c)



d)



9. Dans un graphe complet, déterminez le nombre d'arêtes d'un graphe d'ordre :

a) 3 ___________
b) 4 ___________
c) 5 ___________
d) 6 ___________
e) 7 ___________
f) n ___________

10. Déterminez le nombre minimal d'arêtes d'un graphe connexe s'il est formé de :

a) 3 sommets ________
b) 4 sommets ________
c) 5 sommets ________
d) 10 sommets ________
e) n sommets ________

11. Dans un graphe connexe, sans boucle ni arête parallèle à une autre, déterminez le degré maximal d'un sommet si le graphe est d'ordre :

a) 2 ___________
b) 3 ___________
c) 4 ___________
d) 10 __________
e) n __________

12. Représentez un graphe d'ordre 5 dont les degrés des sommets sont 5, 4, 2, 1 et 0, et qui ne comporte aucune paire d'arêtes parallèles.

13. Un graphe possède 28 arêtes. Quelle est la somme des degrés de tous les sommets?

14. La somme des degrés des sommets d'un graphe est 222. Combien ce graphe possède-t-il d'arêtes?

15. Combien y a-t-il d'arêtes dans un graphe de 6 sommets dont le degré de chacun est 7?

16. Est-il possible d'avoir un graphe de 17 sommets de degré 3 chacun?

17. Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux? Dans un graphe quelconque…

a) le nombre de sommets est toujours un nombre pair. ______________
b) le nombre de sommets de degré pair est toujours un nombre pair. ________
c) le nombre de sommets de degré pair est toujours un nombre impair. ______
d) le nombre de sommets de degré impair est toujours un nombre pair. ______
e) le nombre de sommets de degré impair est toujours un nombre impair. __________

18. Dans un graphe, il y a cinq sommets A, B, C, D et E. Combien d'arêtes possède ce graphe si les degrés respectifs de ses sommets sont 4, 3, 3, 2 et 2?

19. Est-il possible d'avoir un graphe simple (sans arêtes parallèles ni boucle) de 5 sommets dont les degrés sont :

a) 3, 3, 3, 3 et 2 ? ____________
b) 1, 2, 3, 4 et 5 ? ____________
c) 1, 2, 3, 4 et 4 ? ____________
d) 5, 5, 5, 4 et 4 ? ____________
e) 0, 1, 2, 2 et 3 ? ____________
f) 1, 1, 1, 1, et 1 ? ___________

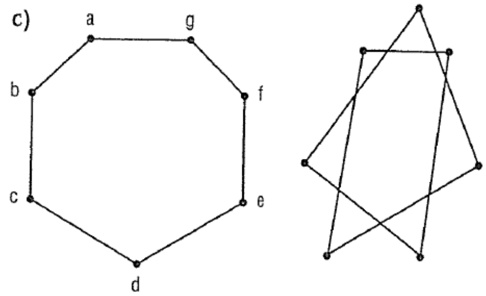
20. Combien d'arêtes possède un graphe complet de 1000 sommets?

21. Dans chacun des cas suivants, on propose deux graphes.

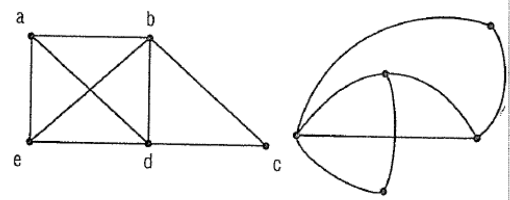
i. Détermine si les graphes sont isomorphes.

ii. Dans l'affirmative, nomme les sommets du graphe muet.

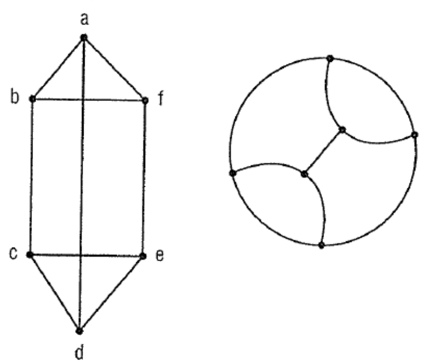
c)



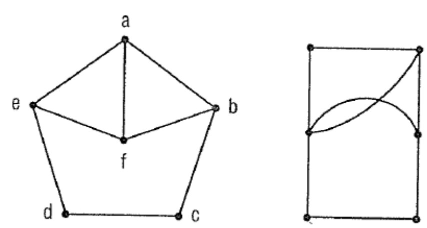
d)



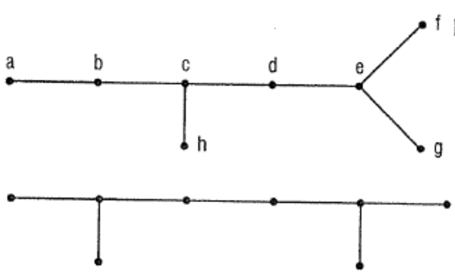
e)



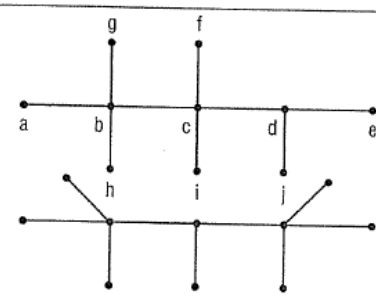
f)



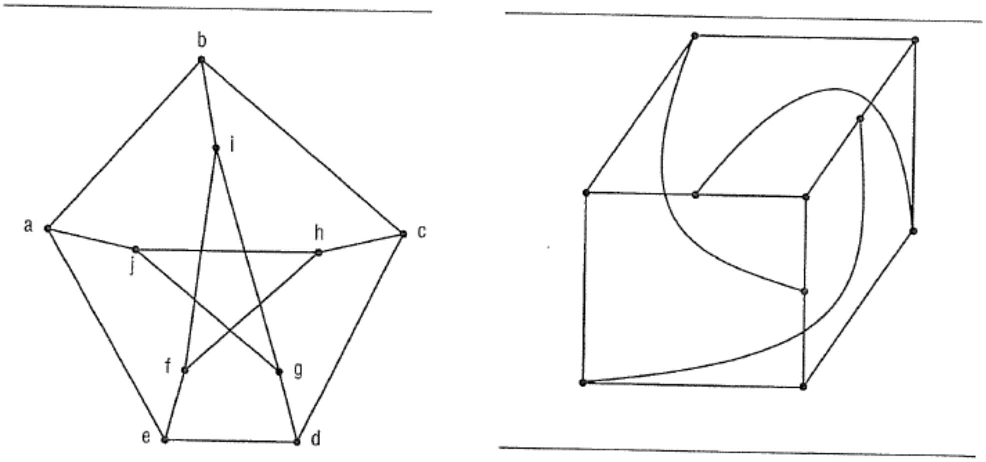
g)



h)

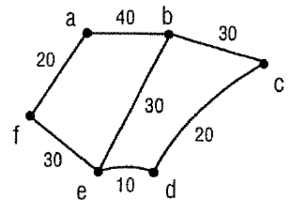


i)

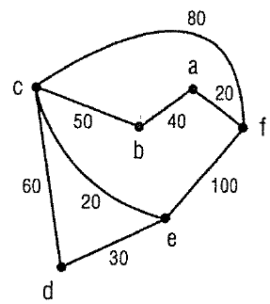


22. Dans chacun des graphes suivants, déterminez la chaîne de valeur minimale du sommet **a** au sommet **d**, puis indiquez sa valeur.

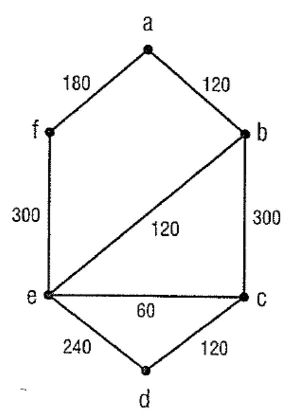
a)



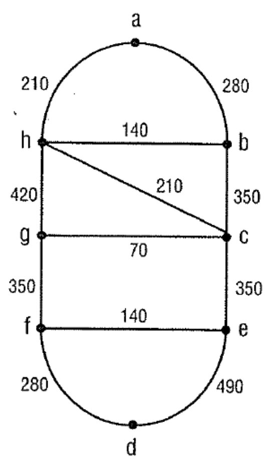
b)



c)

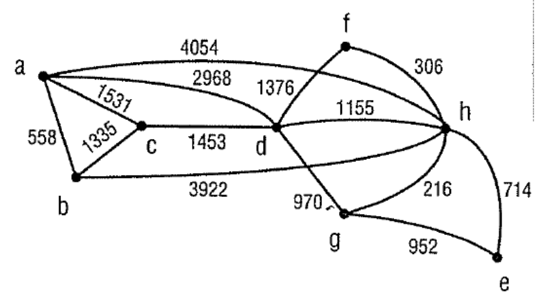


d)



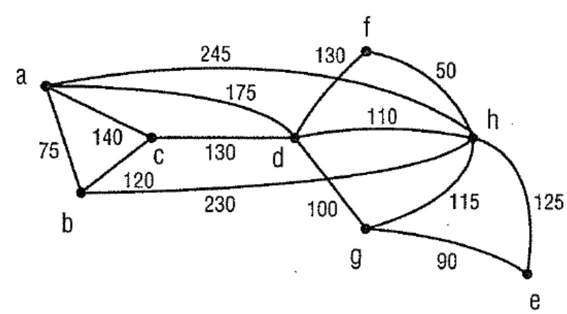
23. Une compagnie aérienne travaille dans un réseau représenté par les graphes ci-dessous.

a) À l'aide du graphe 1 représentant les distances (en km) entre les villes de ce réseau, détermine le trajet le plus <u>court</u> pour aller de la ville **a** à la ville **e**. Indique la valeur de cette chaîne.



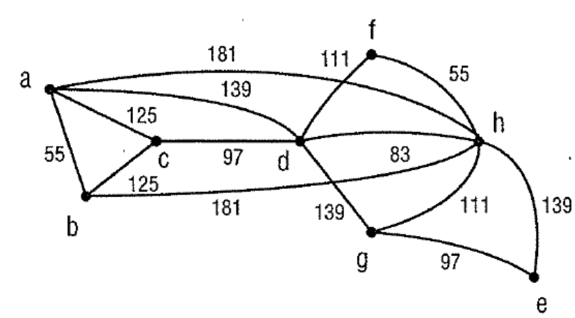
Graphe 1

b) À l'aide du graphe 2 représentant le temps de vol (en min) entre les villes de ce réseau, détermine le trajet le plus <u>rapide</u> pour aller de la ville **a** à la ville **e**. Indique la valeur de cette chaîne.



Graphe 2

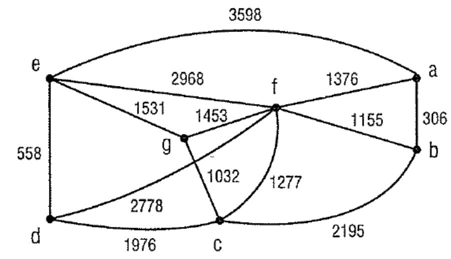
c) À l'aide du graphe 3 représentant le coût des vols (en $) entre les villes de ce réseau, détermine le trajet le moins <u>coûteux</u> pour aller de la ville **a** à la ville **h**. Indique la valeur de cette chaîne.



Graphe 3

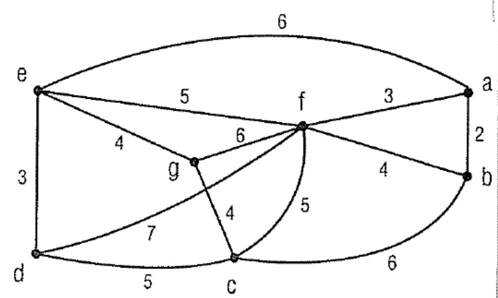
24. Une compagnie possède un réseau de télécommunication entre les ordinateurs situés dans les villes indiquées par les sommets des graphes ci-dessous.

a) À l'aide du graphe 1 représentant les distances (en km) entre les villes de ce réseau, détermine le trajet le plus <u>court</u> pour aller de la ville **a** à la ville **d**. Indique la valeur de cette chaîne.



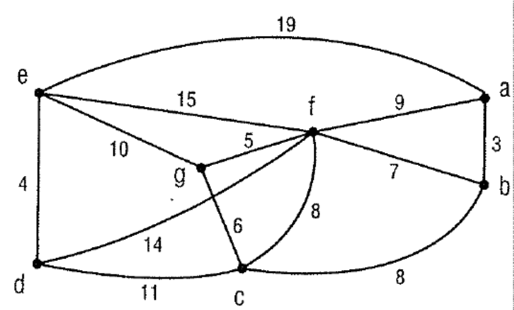
Graphe 1

b) À l'aide du graphe 2 représentant le temps de réaction (en s) entre les villes de ce réseau, détermine le trajet le plus <u>rapide</u> pour obtenir une communication de la ville **a** à la ville **d**. Indique la valeur de cette chaîne.



Graphe 2

c) À l'aide du graphe 3 représentant le coût de location (en milliers de $) des lignes de communication entre les villes de ce réseau, détermine le trajet le moins <u>coûteux</u> pour une ligne de communication de la ville **a** à la ville **d**. Indique la valeur de cette chaîne.



Réponses de la section « exercices »

#1 Plusieurs réponses possibles : a) A-B-C-D-E b) B-A-F-E-D-C-B-F c) A-B(1)-C-D-B(2)-C-A-D d) D-E-A-B-E-C-B-D-C

#2 Plusieurs réponses possibles: a) D-A-B-C(2)-A-C(1)-D b) E-A-D-E-C-B-E c) C-B-A(1)-E-A(2)-D-E-B-D-C d) A-B-C-D-E-F-C-E-B-F-A

#3 Plusieurs réponses possibles: a) B-A-D-E-C b) A-E-D-C-B-F

#4 Plusieurs réponses possibles : a) A-B-D-C-A b) A-B-E-D-C-A

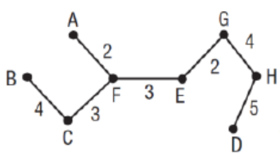
#5 a) Non, il y a plus de 2 sommets de degré impair. Il est donc impossible de créer une chaîne eulérienne.

b) Deux possibilités : HCBAEFDGH ou HGDFEABCH.

#6 a) AHBE(7) b) ACHGE(8) c) ABGE(5) d)AFCJE(5)

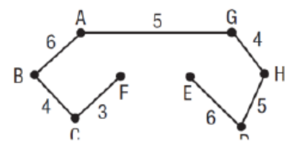
#7

a) 1)



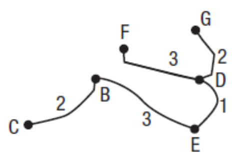
valeur 23

2) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*



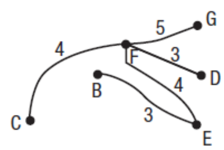
valeur 33

b) 1) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*



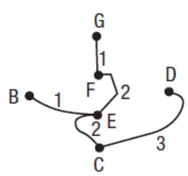
valeur 11

2) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*



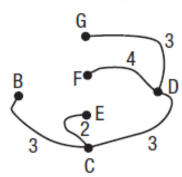
valeur 19

c) 1) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*



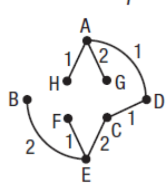
valeur 9

2) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*



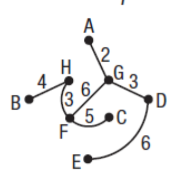
valeur 15

d) 1) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*



valeur 10

2) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*



valeur 29

#8

a) A-C-F-D-I-Z ou A-C-F-D-H-Z **b)** A-C-H-Z

c) A-C-E-Z ou A-F-J-L-D-Z **d)** A-C-B-Z

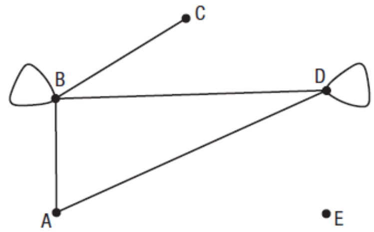
#9 a) 3 b) 6 c) 10 d) 15 e) 21 f) $\frac{n(n-1)}{2}$

#10 a) 2 b) 3 c) 4 d) 9 e) $n-1$

#11 a) 1 b) 2 c) 3 d) 9 e) $n-1$

#12

Plusieurs réponses possibles. Exemple :



#13 Somme des degrés: 56

#14 111 arêtes

#15 21 arêtes

#16 Non, il y a toujours un nombre pair de sommets de degré impair.

#17 a) Faux b) Faux c) Faux d) Vrai e) Faux

#18 7 arêtes

#19 a) oui b) non c) non (graphe simple, mais c'est un graphe quelconque)
d) non e) oui f) non

#20 499 500 arêtes

#21 c) oui d) non e) oui f) non g) non h) non i) oui

#22 a) afed (60) b) abced (140) c) abecd (420) d) ahcgfd (1120)

#23 a) ahe (4768 km) b) adge (365 minutes) c) ah (181 $)

#24 a) afd (4154 km) b) aed (9 secondes) c) abcd (22 000 $)