Chapitre 4
Fonctions exponentielles et logarithmiques

Comment prévoir la valeur d'un placement à long terme? Comment fait-on pour dater un artefact découvert sur un site archéologique? À quel modèle mathématique l'évolution d'une population bactérienne peut être associée? Dans ce chapitre, vous analyserez plusieurs situations qui peuvent être décrites à l'aide de fonctions exponentielles et logarithmiques. De plus, vous utiliserez des équivalences du calcul logarithmique afin de résoudre des équations et des inéquations.

4.1 FONCTIONS EXPONENTIELLES

4.1.1 Notion d'exposant (rappel)

Par définition, l'exponentiation consiste à affecter une **base** d'un **exposant** afin d'obtenir une **puissance**. On a donc l'expression :

$$a^m = p \quad \begin{cases} a \text{ est la base} \\ m \text{ est l'exposant} \\ p \text{ est la puissance} \end{cases}$$

Tout au long de ce chapitre, il vous sera très utile de connaître quelques puissances par cœur :

$2^1 =$ _______ $2^2 =$ _______ $2^3 =$ _______ $2^4 =$ _______

$2^5 =$ _______ $2^6 =$ _______ $2^7 =$ _______ $2^8 =$ _______

$3^1 =$ _______ $3^2 =$ _______ $3^3 =$ _______ $3^4 =$ _______ $3^5 =$ _______

$4^1 =$ _______ $4^2 =$ _______ $4^3 =$ _______ $4^4 =$ _______

$5^1 =$ _______ $5^2 =$ _______ $5^3 =$ _______ $5^4 =$ _______

$6^1 =$ _______ $6^2 =$ _______ $6^3 =$ _______

$7^1 =$ _______ $7^2 =$ _______ $7^3 =$ _______

…

$10^1 =$ _______ $10^2 =$ _______ $10^3 =$ _______

$10^4 =$ _____________ $10^5 =$ _____________ $10^6 =$ _____________

De plus, les « fameuses » lois des exposants seront très utiles pour résoudre des problèmes :

Rappel : Lois des exposants

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $m, n \in \mathbb{Z}$.

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ fois}}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ (définition de l'exponentiation)

$a^1 =$ ______

$a^0 =$ ______

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^m =$ ______

$a^m \cdot a^n =$ ______

$\left(a^m\right)^n =$ ______

$\dfrac{a^m}{a^n} =$ ______

$a^{-n} =$ ______ $=$ ______ donc $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} =$ ______

$(a \cdot b)^m =$ ______

$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

IMPORTANT : $\sqrt{x} =$ ______ $\sqrt[3]{x} =$ ______ $\sqrt[n]{x} =$ ______ $\sqrt[4]{x^5} =$ ______ $x^{-2} =$ ______

Expliquons maintenant quelques lois…

EXERCICES PRÉALABLES :

Ne pas utiliser la calculatrice lorsque ce logo est présent!

1. Écrire 81 comme une puissance de 3 : _______

2. Effectuer **mentalement** les calculs suivants.

a) $3^3 =$ _______ b) $\frac{7^5}{7^3} =$ _______ c) $4^{-3} \cdot 4^6 =$ _______ d) $11^5 \cdot 11^{-5} =$ _______

e) $\frac{10^3}{10^6} =$ _______ f) $\frac{2^7}{2^0} =$ _______ g) $5^3 - 5^2 =$ _______ h) $\frac{2^5 \cdot 2^5}{16} =$ _______

3. Donner la valeur de l'expression suivante **sans utiliser la fonction** $\sqrt[x]{}$ de votre calculatrice.

$\sqrt[7]{279\ 936^3} =$

4. Écrire l'expression suivante de manière équivalente avec des exposants positifs seulement.

$\frac{2^{-17} a^3 b^{-5}}{3^{12} b^8 c^{-5}} =$

5. Simplifier chacune des expressions suivantes et donner la réponse à l'aide d'exposants positifs uniquement.

a) 4^{-2} b) $\frac{1}{3 \cdot 5^{-1}}$ c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$ d) $\frac{4^2}{3^{-5}}$ e) $\frac{3}{2x^{-2}}$

f) $\frac{2^{-6} \cdot 4^5}{4 \cdot 2^3}$ g) $\frac{3(x-4)^{-1}}{(x-4)}$ h) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3$ i) $\frac{2^5 \cdot 3^{-1} \cdot a^{-8}}{2 \cdot 3^{-7} \cdot a^{-8}}$

6. Effectuer les opérations et exprimer la réponse à l'aide d'une seule base et d'un seul exposant positif.

a) $4^{-2}\cdot 4^{-3}$ b) $\dfrac{\sqrt{7}}{7^{-1}}$ c) $\sqrt[3]{5}\cdot(5)^{3/2}$ d) $\left(4^{-1}\right)^{2}$ e) $\dfrac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt{5}}$

7. Effectuer les opérations, simplifier au maximum et exprimer la réponse à l'aide d'exposants positifs uniquement (la réponse comportera plus d'une puissance).

a) $5^{8}\cdot 2^{3}\cdot 5^{-4}$ b) $a^{14}\cdot\dfrac{2^{5}}{a^{8}}$ c) $\dfrac{8^{10}\cdot 6^{-1/2}}{8^{-3}}$ d) $\dfrac{3^{2}\cdot\sqrt[3]{7^{5}}}{7}$

8. Les égalités suivantes sont-elle vraies ou fausses? Modifier l'exposant du membre de droite des égalités fausses afin de les rendre vraies.

a) $9=3^{3}$ b) $(-25)^{2}=5^{4}$ c) $\dfrac{4}{9}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2}$ d) $\left(\dfrac{27}{125}\right)^{3}=\left(\dfrac{3}{5}\right)^{6}$ e) $\sqrt{\dfrac{8}{27}}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{3/2}$

9. Soit *p*, le prix d'un baril de pétrole à un moment donné. Pour chaque situation, donner l'expression algébrique qui représente le nouveau prix du baril.

a) Le prix *p* a diminué de 20% en une semaine.

b) Le prix *p* a augmenté de 5% depuis sept jours.

c) Le prix *p* a été réduit de moitié en 168 heures.

Mise au point #1 ► Corrigé à la page 57

1. Détermine le nombre caché (♦).

a) $5^3 = \blacklozenge$

b) $2^{-3} = \blacklozenge$

c) $11^0 = \blacklozenge$

d) $4^6 \times 4^{-3} = 4^{\blacklozenge}$

e) $3^{\blacklozenge} = \dfrac{1}{27}$

f) $7^{(5 - \blacklozenge)} = \dfrac{1}{49}$

g) $\blacklozenge^{2 \times 3} = 64$

h) $10^{\blacklozenge} = 0{,}000\ 1$

i) $\blacklozenge^2 = \dfrac{1}{9}$

j) $(5^2)^{\blacklozenge} = 625$

k) $(5^{\blacklozenge})^3 = \dfrac{1}{125}$

l) $99^{\blacklozenge} = 99$

2. Donne la valeur des trois termes cachés (♦) dans ces suites :

a) 6, 18, 54, 162, ♦, ♦, ♦

b) 2916, 324, 36, ♦, ♦, ♦

c) 0,0025; 0,025; 0,25; ♦; ♦; ♦

d) 768, 192, 48, ♦, ♦, ♦

3. Détermine la valeur des deux termes manquants (♦) dans ces suites où chacun des termes est lié au suivant par un même facteur multiplicatif.

a) 13, ♦, ♦, 1625

b) 4, ♦, 324, ♦, 26244

c) ♦, 10, ♦, 2560

d) 3,5; ♦, 56; ♦; 896

4. Exprime chaque multiplication sous une forme exponentielle dont les bases sont des nombres premiers.

a) $-5 \times -5 \times -5 \times -5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 1$

b) $-2 \times -2 \times 2 \times 2 \times -3 \times 3$

c) $2 \times 4 \times 8 \times 12 \times 16 \times 24$

d) $-12 \times -3 \times -2 \times 6 \times 18$

<u>Exemples</u> :

Traduire chacune des situations suivantes par une table de valeurs et répondre à la question posée.

1. Des chercheurs font une étude sur une population d'insectes. Les recherches indiquent que la population de 180 224 insectes diminue de moitié chaque semaine. Déterminer le nombre d'insectes que les chercheurs pourront dénombrer après 11 semaines.

Temps écoulé (semaines)	0				…	t
Nombre d'insectes					…	

Réponse : ______________________ insectes

2. Un bocal contenait initialement 5 bactéries. Cette population quadruple chaque heure. Combien de bactéries dénombrera-t-on après 3 heures 30 minutes?

Temps écoulé (heures)	0				…	t
Population					…	

Réponse : ______________________ bactéries

3. La présence d'un certain type d'insecte ravage une forêt de 200 hectares. D'une semaine à l'autre, on constate que la superficie boisée n'est que 75% de ce qu'elle était précédemment. On se demande ce qu'il restera de la forêt après ½ année.

Temps écoulé (semaines)	0				…	t
Superficie (hectares)					…	

Réponse : ______________________ hectares

4. On fait rebondir une super balle lâchée d'une hauteur de 12 mètres. On constate qu'à chaque bond, la balle remonte aux 4/5 de la hauteur précédente. Quelle hauteur atteindra-t-elle après 100 bonds?

Nombre de bonds	0				…	n
Hauteur de la balle (m)					…	

Réponse : ______________________ m

5. La valeur d'un placement bancaire de 1200$ augmente de 2% chaque année. Quelle sera la valeur d'un tel placement après 50 ans?

Temps écoulé (années)	0				…	t
Valeur du placement ($)					…	

Réponse : ______________________ $

Remarques :

- On constate que l'état initial de la situation est donné par le ______________________ de la puissance.
- Un phénomène exponentiel peut être croissant ou décroissant, « rapide » ou « lent ».
- Si la base de la puissance était 1, le phénomène serait considéré ________________.

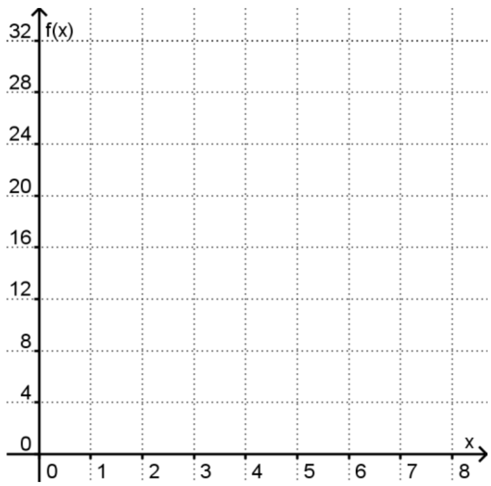
$\boxed{4.1.2}$ Modèle exponentiel

MISE EN SITUATION – LA NAPPE D'HUILE :

Un accident s'est produit en haute mer : le réservoir d'huile d'un bateau est percé et l'huile se répand à la surface de l'eau. À l'arrivée des secours, la nappe d'huile mesure 1 m² et sa superficie double à chaque minute.

Soit x : le temps écoulé (en minutes) depuis l'arrivée des secours
$f(x)$: la superficie de la nappe d'huile (en mètres carrés)

Graphique de la situation :



Recherche de la base (facteur multiplicatif) :

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$						

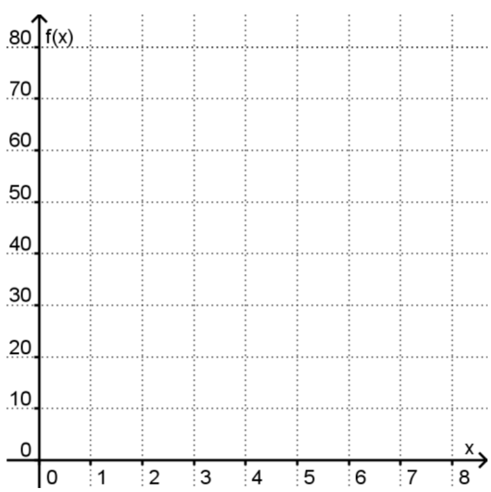
Règle de la fonction :

$f(x) =$ ____________________

LA NAPPE D'HUILE (SUITE) :

Au moment où le pompage de l'huile commence, la nappe d'huile mesure 80 m² et sa superficie est réduite de moitié à chaque minute. La variable x représente maintenant le temps écoulé (en minutes) depuis le début du pompage.

Graphique de la situation :



Recherche de la base (facteur multiplicatif) :

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$						

Règle de la fonction :

$f(x) =$ ____________________

AUTRES EXEMPLES :

x	0	2	4	6	8
$f(x)$		72	162	364,5	820,125

Recherche de la base (facteur multiplicatif) :

Règle de la fonction : $f(x) =$ ____________________

x	0	4	7	10	13
$f(x)$		64	512	4096	32 768

Recherche de la base (facteur multiplicatif) :

Règle de la fonction : $f(x) =$ ____________________

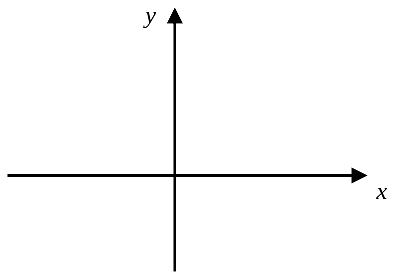
On peut donc déterminer la base c d'une fonction exponentielle $f(x) = a \cdot c^x$:

$c =$ ou, de manière générale, $c^n =$

<u>Activité d'exploration (à l'aide de *GeoGebra*)</u> :

Tracer les croquis des fonctions suivantes, puis rédiger vos observations.

1) $f(x) = 2^x$

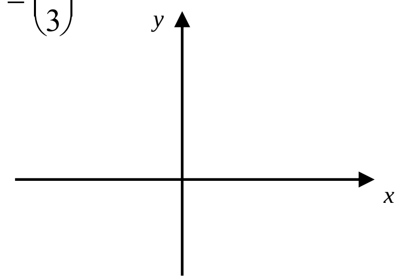


Domaine : Codomaine :

Ordonnée à l'origine : Zéro :

Variation :

2) $g(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

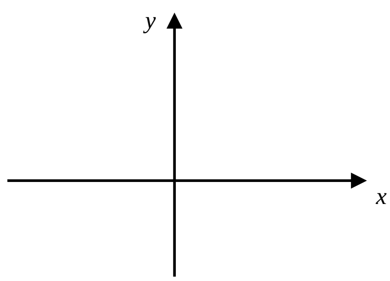


Domaine : Codomaine :

Ordonnée à l'origine : Zéro :

Variation :

3) $h(x) = 5^{-x}$

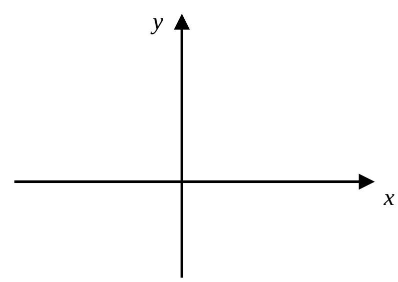


Domaine : Codomaine :

Ordonnée à l'origine : Zéro :

Variation :

4) $i(x) = (-2)^x$

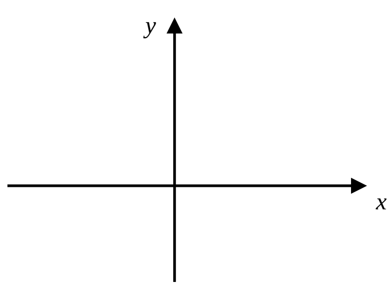


Domaine : Codomaine :

Ordonnée à l'origine : Zéro :

Variation :

5) $j(x) = -3(2)^x$

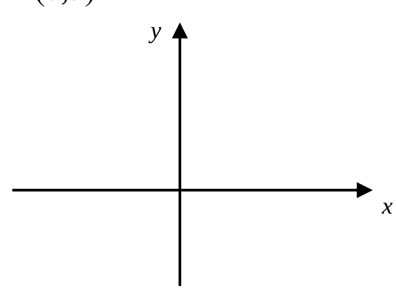


Domaine : Codomaine :

Ordonnée à l'origine : Zéro :

Variation :

6) $k(x) = -(0{,}5)^x$

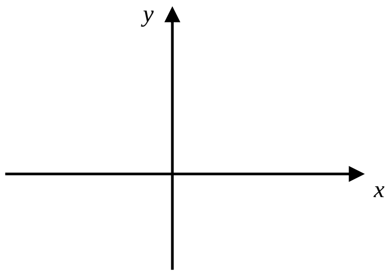


Domaine : Codomaine :

Ordonnée à l'origine : Zéro :

Variation :

7) $l(x) = 1^x$

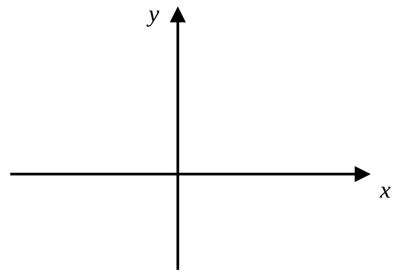


Domaine : Codomaine :

Ordonnée à l'origine : Zéro :

Variation :

8) $m(x) = 0^x$



Domaine : Codomaine :

Ordonnée à l'origine : Zéro :

Variation :

Observations :

- La base c de toute fonction exponentielle doit être strictement positive et différente de 1, car :
  - si $c < 0$, alors on obtient une fonction ____________________ ;
  - si $c = 0$, alors on obtient une fonction ____________________ ;
  - si $c = 1$, alors on obtient une fonction ____________________.

Ne pas confondre -2^x avec $(-2)^x$

- Une fonction exponentielle possède toujours une ____________________ horizontale.

<u>Exercice</u> :

Voici huit paires de fonctions nommées *f* et *g*. Dans chaque cas, identifier laquelle des deux représente le phénomène exponentiel le plus *intense* (ayant la variation la plus forte).

a) $\begin{cases} f(x) = 3^{3x} \\ g(x) = 5^{2x} \end{cases}$

b) $\begin{cases} f(x) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x \\ g(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x \end{cases}$

c) $\begin{cases} f(x) = 0{,}01^x \\ g(x) = 100^x \end{cases}$

d) $\begin{cases} f(x) = 8^x \\ g(x) = 0{,}1^x \end{cases}$

e) $\begin{cases} f(x) = 4^x \\ g(x) = \left(\dfrac{1}{5}\right)^x \end{cases}$

f) $\begin{cases} f(x) = 2\cdot(0{,}3)^x \\ g(x) = 0{,}7^x \end{cases}$

g) $\begin{cases} f(x) = 3^x \\ g(x) = 0{,}99^x \end{cases}$

h) $\begin{cases} f(x) = 50^x \\ g(x) = (2\%)^x \end{cases}$

$\boxed{4.1.3}$ Fonction exponentielle et notation logarithmique

La règle de la fonction exponentielle de base est de la forme :

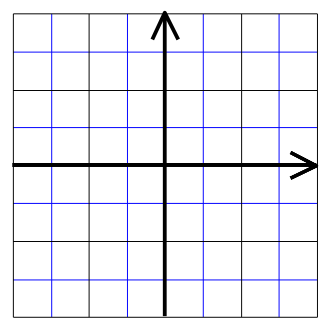
$$f(x) = c^x$$

où « c » est une constante différente de 1 ($c \neq 1$)
« c » est une constante supérieure à 0 ($c > 0$) } *TRÈS IMPORTANT!*

Dans cette fonction, la variable indépendante x joue le rôle d'exposant affectant la base. La base de l'exponentielle indique, pour sa part, le *facteur multiplicatif* entre deux termes consécutifs (voir page 9). Graphiquement, on constate que la variable dépendante augmente d'abord très lentement puis, de plus en plus rapidement ou alors elle diminue très rapidement au début puis, de plus en plus lentement.

Considérons les propriétés de la fonction exponentielle <u>de base</u>.

Règle : $f(x) = c^x$ avec c______ et c______



Domaine : ______ Codomaine : ______

Zéro : ___________ Ordonnée à l'origine : ______

Asymptote : ___________

Variation : étude de la croissance et de la décroissance

____ si $c > 1$

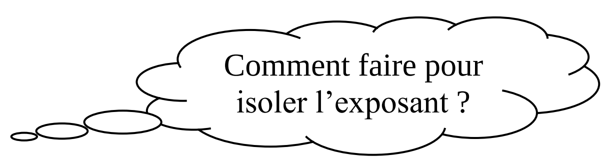
____ si $0 < c < 1$

Signes : étude du signe des images de la fonction

$\forall\ x \in$ ___________, *on a* $f(x)$ ___ 0

Réciproque : la réciproque de la fonction exponentielle est une _____________________.

Déterminons f^{-1} :



Il faut savoir que :

1) l'exposant qu'on attribue à une base est aussi appelé ____________________ ;
2) on peut passer facilement de la notation exponentielle et à la notation logarithmique.

Voyons de plus près cette équivalence.

$$a^m = p \iff \log_a p = m$$

$$base^{exposant} = puissance \iff \log_{base} puissance = exposant$$

On dira que :

« m est le logarithme de p en base a »

« m est l'exposant que je dois affecter à la base a pour obtenir la puissance p »

Mise au point #2 ► Corrigé à la page 57

1. Écris sous la forme logarithmique les expressions suivantes.

a) $10^2 = 100$ b) $5^3 = 125$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

d) $a^2 = 25$ e) $a^m = x$ f) $a = b^x$

2. Détermine mentalement le logarithme demandé.

a) $\log_2 32$ b) $\log_4 64$ c) $\log 10\,000$

d) $\log_{1/2}\left(\frac{1}{4}\right)$ e) $\log 0{,}001$ f) $\log_{3/4}\left(\frac{27}{64}\right)$

3. Écris sous la forme logarithmique les expressions suivantes.

a) $3^2 = 9$ b) $5^4 = 625$ c) $2{,}5^s = t$

d) $y = \left(\frac{1}{8}\right)^x$ e) $s^v = w$ f) $y = c^x$

4. Détermine l'expression exponentielle équivalente à :

a) $\log_6 36 = 2$ b) $\log_n 100 = z$ c) $\log_{0{,}75} y = x$ d) $\log_t s = r$

4.1.4 Fonctions exponentielles transformées

❖ **Recherche de la règle d'une fonction exponentielle** de la forme $f(x) = a \cdot c^x$

Chercher la règle d'une fonction exponentielle à partir de couples donnés consiste à résoudre un système formé de deux équations à deux inconnues.

Exemples :

1. Les couples (3, 135) et (6, 3645) appartiennent à une fonction exponentielle d'équation $f(x) = a \cdot c^x$. Donner la règle de f.

2. Les couples $\left(1, \frac{-1}{3}\right)$ et $\left(-2, \frac{-9}{8}\right)$ appartiennent à une fonction exponentielle d'équation $g(x) = a \cdot c^x$. Donner la règle de g.

3. Déterminer la règle de la fonction exponentielle $h(x) = a \cdot c^x$ sachant qu'elle passe par les points de coordonnées A(4 ; –62,5) et B(5 ; –312,5).

Mise au point #3 ► Corrigé à la page 57

1. En utilisant une méthode algébrique, résous les systèmes d'équations suivants :

a) $\begin{cases} 0{,}75 = m \cdot n^{-2} \\ -96 = m \cdot n^{5} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 25{,}25 = m \cdot n^{3} + 5 \\ \dfrac{23}{3} = m \cdot n^{-2} + 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 247 = m \cdot n^{-1} - 3 \\ 3{,}4 = m \cdot n^{3} - 3 \end{cases}$

2. Les tables de valeurs ci-dessous présentent des fonctions exponentielles dont les règles sont de la forme $f(x) = a \cdot c^{x}$. Écris la règle de chacune de ces fonctions.

a)

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	5	15	45	135	405	1215	3645

b)

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	-4	-20	-100	-500	-2500	-12500	-62500

c)

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1	0,75	0,5625	0,4219	0,3164	0,2373	0,178

3. Détermine les règles des fonctions exponentielles à partir des coordonnées des points donnés ci-dessous. Toutes les règles sont de la forme $f(x) = a \cdot c^{x}$.

a) A(1, 24) et B(4, 648)

b) A(–2; –0,16) et B(4, –2500)

c) A(–6, 48) et B(1; 0,375)

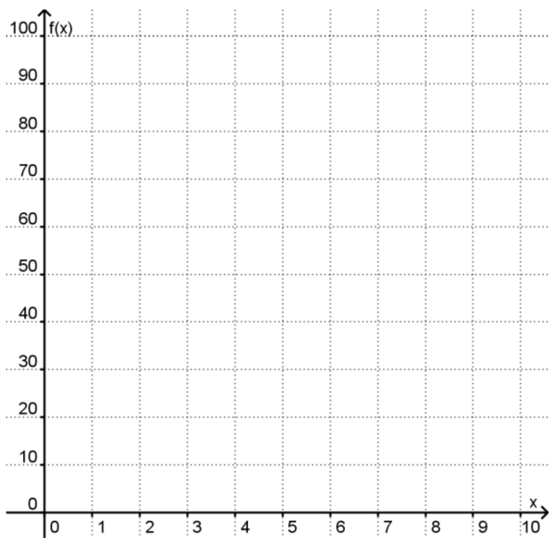
❖ **Le paramètre *k*** dans la fonction $f(x) = a \cdot c^x + k$

<u>La nappe d'huile</u> (version k) :

Un accident s'est produit en haute mer : le réservoir d'huile d'un bateau est percé et l'huile se répand à la surface de l'eau. Au moment où la nappe d'huile mesure 100 m^2, on procède à son pompage. Malheureusement, une partie de la nappe mesurant 20 m^2 est inaccessible. La superficie de la nappe d'huile restante diminue de moitié à chaque minute.

Soit x : le temps écoulé (en minutes) depuis le début du pompage
$f(x)$: la superficie de la nappe d'huile (en mètres carrés)

Graphique de la situation :



Recherche de la base (facteur multiplicatif) :

x	0	1	2	3	4	5
m^2 d'huile inaccessible	20	20	20	20	20	20
m^2 d'huile accessible						
$f(x)$						

Règle de la fonction :

$f(x) =$ ______________________________

<u>Conséquences de l'ajout d'une constante à la règle d'une fonction exponentielle</u>

La règle obtenue dans la situation précédente correspond au modèle $f(x) = a \cdot c^x + k$. Comme on peut le constater, l'ajout d'une constante ($k \neq 0$) à la règle d'une fonction exponentielle a certaines conséquences importantes :

1) bris de régularité ___________________________________ dans la table de valeurs, donc

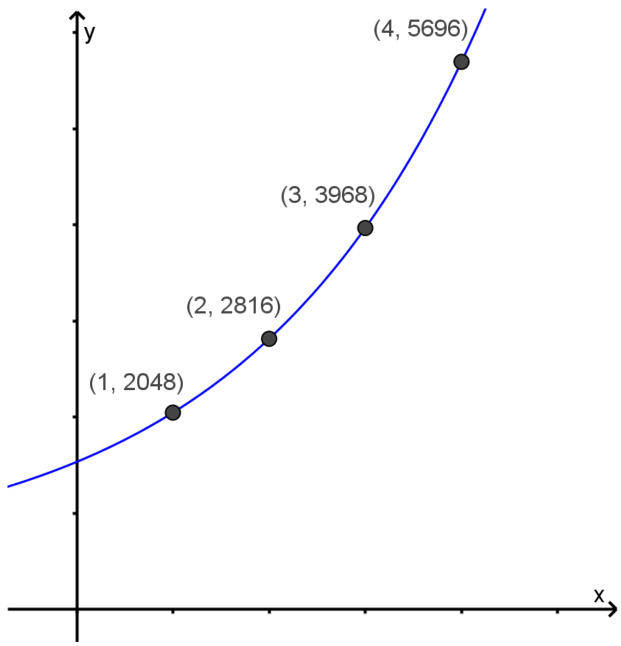
   on ne peut plus retrouver la base c à l'aide de la formule $c = \dfrac{f(x+1)}{f(x)}$;

2) l'équation de l'asymptote est dorénavant ____________ ;

3) la valeur initiale de la situation est maintenant représentée par __________.

Voici la table de valeurs et le graphique d'un autre phénomène exponentiel :

x	0	1	2	3	4	5	6
y	…	2048	2816	3968	5696	8288	…



Soit la table de valeurs d'un phénomène exponentiel *f* :

x	…	x	$x+1$	$x+2$	…
y	…	$f(x)$	$f(x+1)$	$f(x+2)$	…

On peut donc déterminer la base *c* d'une fonction exponentielle
de la forme $f(x) = a \cdot c^x + k$ à l'aide de la formule :

$c =$

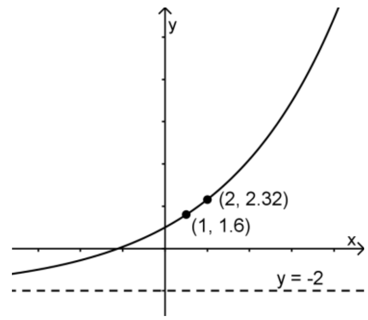
Cette formule s'applique également à une fonction de la forme $f(x) = a \cdot c^x$.

❖ **Recherche de la règle d'une fonction exponentielle** de la forme $f(x) = a \cdot c^{x} + k$

Encore une fois, pour déterminer la règle d'une fonction exponentielle, on doit résoudre un système formé de deux équations à deux inconnues.

Exemples :

1. Soit la fonction d'équation $f(x) = a \cdot c^{x} + k$.
   Trouver la règle à l'aide du croquis ci-contre.



2. Déterminer la règle de la fonction exponentielle représentée ci-dessous :

x	0	3	4	5	6
$g(x)$	$-\frac{31}{8}$	–3	–2	0	4

❖ **Le paramètre *b*** dans la fonction $f(x) = a \cdot c^{bx}$

LA NAPPE D'HUILE (VERSION B_1) :

Un accident s'est produit en haute mer : le réservoir d'huile d'un bateau est percé et l'huile se répand à la surface de l'eau. À l'arrivée des secours, la nappe d'huile mesure déjà 8 m^2 et sa superficie quadruple toutes les 20 secondes.

Soit x : le temps écoulé (en **minutes**) depuis l'arrivée des secours
$f(x)$: la superficie de la nappe d'huile (en mètres carrés)

Donner la règle de la fonction exponentielle qui modélise cette situation.

Règle de la fonction : $f(x) =$ ____________________

Quelle sera la superficie de la nappe d'huile après 1½ minute ?

LA NAPPE D'HUILE (VERSION B_2) :

Un accident s'est produit en haute mer : le réservoir d'huile d'un bateau est percé et l'huile se répand à la surface de l'eau. À l'arrivée des secours, la nappe d'huile mesure déjà 8 m^2 et sa superficie quintuple toutes les 3 minutes.

Soit x : le temps écoulé (en **minutes**) depuis l'arrivée des secours
$f(x)$: la superficie de la nappe d'huile (en mètres carrés)

Donner la règle de la fonction exponentielle qui modélise cette situation.

Règle de la fonction : $f(x) =$ ____________________

Quelle sera la superficie de la nappe d'huile après 5 minutes ?

❖ **Recherche de la règle d'une fonction exponentielle** de la forme $f(x) = a \cdot c^{bx} + k$

Pour déterminer la règle d'un « phénomène exponentiel » à partir d'un contexte, on identifie généralement les éléments suivants :

1) la quantité initiale ($a + k$) ;
2) la description du phénomène (*facteur multiplicatif*) :
   - la fraction restante dans le cas d'une situation de décroissance ($0 < c < 1$) ou
   - le multiple de la quantité initiale dans le cas d'une situation de croissance ($c > 1$) ;
3) le rapport entre le nombre de fois que la quantité est multipliée durant une période de temps et la durée de cette période (b) ;
4) la valeur d'une constante (k).

Lorsque la quantité est multipliée ***m*** fois par ***n*** unité(s) de temps, la valeur de b est :

On obtient une règle de la forme :

$$f(x) = a \cdot c^{bx} + k$$

où $c > 0$ et $c \neq 1$; $a \neq 0$ et $b \neq 0$

Exemples :

1. *Multiplication bactériologique*
Dans un vase de Petri, des bactéries se reproduisent de sorte que leur nombre double en moyenne toutes les 20 minutes. Au départ, on a évalué qu'il y avait environ 250 bactéries. Sachant que t représente le temps écoulé en heures depuis le début de l'expérimentation et N, le nombre de bactéries dans le vase :

a) Donner la règle de la fonction.

b) Après combien de temps le nombre de bactéries attendra-t-il 256 000 ?

c) Et si, des 250 bactéries retrouvées en début d'expérimentation dans le vase de Petri, 20 d'entre elles ne pouvaient se reproduire, qu'adviendrait-il de la règle de la fonction?

2. *Bonds et rebonds…*
James laisse tomber une bille de verre d'une hauteur de 1,5 mètre par rapport au sol. Une analyse des rebondissements permet de constater que la hauteur diminue de 25% après chaque bond. Donner la règle de la fonction exponentielle qui permettrait de déterminer la hauteur H du bond par rapport au sol (en cm) selon le nombre x de bonds.

3. *Facteur d'élasticité*
On analyse le rebondissement d'une balle constituée d'un autre matériau. Par rapport au sol, cette balle atteint une hauteur de 80 cm après son 1[er] rebond et une hauteur de 5,12 cm après le 4[e] bond.

Remplir cette table de valeurs :

Nombre de bonds	0	1	2	3	4	5	6
Hauteur de la balle (cm)		80			5,12		

Trouver la règle de la fonction exponentielle qui met en relation le nombre x de bonds et la hauteur H atteinte par la balle après chaque bond.

4. *La voiture de Boris*
Boris s'est acheté une voiture au coût de 10000$ qui perd 20% de sa valeur tous les 2 ans.

a) Donner la règle en utilisant les variables V ($) et t (années).

b) Déterminer la valeur de la voiture de Boris dans 11 ans. *(Arrondir à la centaine près.)*

5. *Jour de pluie*
Jessica rêvasse en regardant par la fenêtre. Elle observe qu'à un certain moment, il y a 5 gouttes d'eau sur la vitre, puis ce nombre triple à toutes les 2 minutes.

a) Donner la règle en utilisant les variables N (gouttes) et t (secondes).

b) Donner la règle en utilisant les variables N (gouttes) et t (minutes).

c) Donner la règle en utilisant les variables N (gouttes) et t (heures).

d) Combien y aura-t-il de gouttes d'eau 11 min 33 sec après le début de l'observation?

Le paramètre *h* dans la fonction $f(x) = a \cdot c^{\,b(x-h)}$

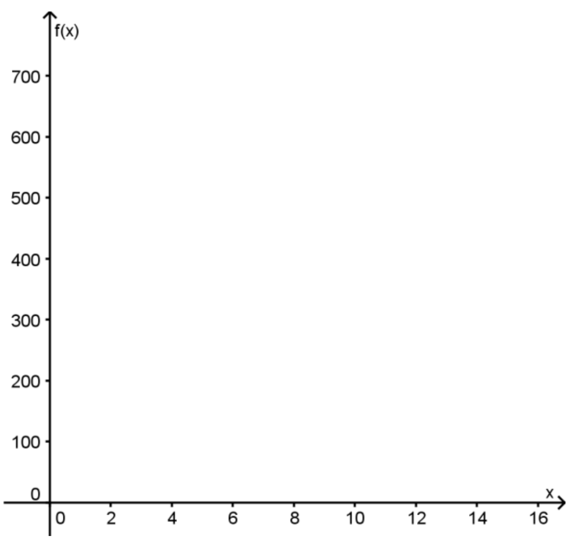
<u>LA NAPPE D'HUILE</u> (VERSION H) :

Un accident s'est produit en haute mer : le réservoir d'huile d'un bateau est percé et l'huile se répand à la surface de l'eau. À l'arrivée des secours, la nappe d'huile mesure déjà 8 m^2 et sa superficie augmente de 50% toutes les 30 secondes.

Cinq minutes après l'arrivée des secours, le pompage peut commencer et la dimension de la nappe d'huile réduit de 40% toutes les 3 minutes.

Soit x : le temps écoulé (en **minutes**) depuis l'arrivée des secours
$f(x)$: la superficie de la nappe d'huile (en mètres carrés)

a) Faire un croquis de la fonction *f*.



b) Exprimer l'évolution de la superficie d'huile selon le temps par une règle écrite par parties.

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$$

c) Le coefficient de la puissance de la 2^e partie de la règle représente-t-il l'ordonnée à l'origine de la fonction *f* ?

d) Quelle sera la dimension de la nappe d'huile 15 minutes après l'arrivée des secours?

e) À l'aide des lois des exposants, réécrire la 2^e partie de la fonction sous la forme $f(x) = a \cdot c^{\,x}$. Que représente le « nouveau » paramètre *a* obtenu?

Liens entre les paramètres b, h et l'ordonnée à l'origine

Comme nous venons de le voir pour une fonction de la forme $f(x) = a \cdot c^{\,b(x-h)}$, le coefficient de la puissance ne correspond pas toujours à l'ordonnée à l'origine de la fonction.

Lorsque $h \neq 0$, nous avons deux méthodes pour déterminer l'ordonnée à l'origine de la fonction :

1) On substitue x par zéro et on calcule : $f(0) = a \cdot c^{\,b(0-h)} + k =$ ______________________

2) On simplifie la règle de manière à obtenir le modèle $f(x) = a \cdot c^{\,x} + k$, et l'ordonnée à l'origine devient bien $a + k$, tel que vu précédemment (voir page 16).

En effet, la règle de n'importe quelle fonction exponentielle peut s'exprimer avec :

	4 paramètres :	$f(x) = a \cdot c^{\,b(x-h)} + k$
ou	3 paramètres :	$f(x) = a \cdot c^{\,x-h} + k$
ou	2 paramètres :	$f(x) = a \cdot c^{\,x} + k$

C'est la forme canonique…

Les lois des exposants nous permettent ***toujours*** de passer de **4 paramètres** a, b, h, k à **2 paramètres** a, k (c n'étant pas un paramètre de la fonction, mais une base donnée).

Autrement dit : $f(x) = a \cdot c^{b(x-h)} + k$ $\qquad$ $f(x) = A \cdot C^{x} + k$

(b et h étant fusionnés à C et A respectivement)

Exemple :

$f(x) = 3 \cdot 4^{2x+2} + 6$

$=$ → $a =$ $b =$ $h =$ $k =$ $c =$

$=$

$=$ → $a =$ $b =$ $h =$ $k =$ $c =$

$=$

$=$ → $a =$ $b =$ $h =$ $k =$ $c =$

❖ Fonction exponentielle transformée à l'aide des paramètres *a*, *b*, *h* et *k*

La règle de la fonction exponentielle transformée est donnée par :

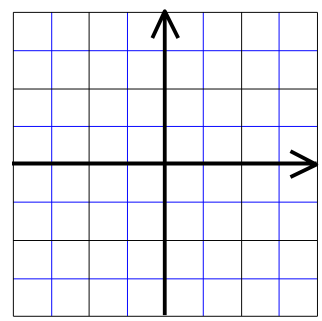
$$f(x) = a \cdot c^{\,b(x-h)} + k \quad \text{où} \quad \begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ c > 0 \text{ et } c \neq 1 \end{cases}$$

Les paramètres a, b, h et k jouent encore et toujours les mêmes rôles dans le graphique :

- a :
- b :
- h :
- k :

Considérons les propriétés de la fonction exponentielle transformée.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Règle : } & f(x) = a \cdot c^{\,b(x-h)} + k \\ \text{ou} & f(x) = a \cdot c^{\,x-h} + k \\ \text{ou} & f(x) = a \cdot c^{\,x} + k \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{avec } c\_\_\_\_\_\_ \text{ et } c\_\_\_\_\_\_ \\ a \neq 0 \text{ et } b \neq 0 \end{array}$$



Graphique : courbe asymptotique à une droite horizontale d'équation $y =$ ______

Domaine : ______

Codomaine : ______________________________

____

Zéro : ______________________________

Ordonnée à l'origine : ______________________________

Extremum : _________

Variation : toujours croissante ou décroissante (étude de la base et des paramètres)

Signes : relatif à l'existence d'un zéro

Réciproque : la réciproque de la fonction exponentielle est une ____________________

Mise au point #4 ► Corrigé à la page 57

1. Donner la valeur des paramètres *a*, *b*, *h* et *k* dans la règle $f(t) = 12(0{,}8)^{3t-3} - 0{,}75$.
   Puis, préciser la valeur de la base de la fonction.

2. D'un simple coup d'œil, déterminer les équations des asymptotes.

   a) $f(x) = -4(5)^{x} - 3$

   b) $f(x) = (2)^{x+1} + 4$

   c) $f(x) = -(2)^{7x-3} - \dfrac{2}{3}$

   d) $f(x) = -2{,}5(1{,}75)^{x}$

3. Écrire les règles suivantes en utilisant 3 paramètres (*a*, *h* et *k*).

   a) $f(x) = 3(0{,}5)^{-2(x-10)} + 2$

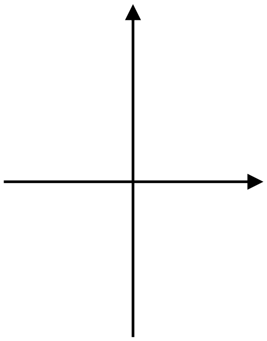
   b) $f(x) = -(3)^{4x-8} - 5$

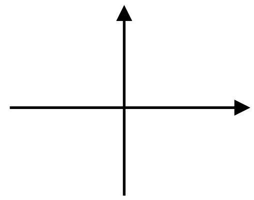
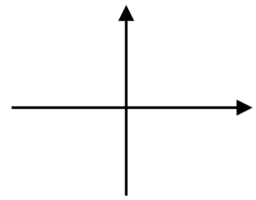
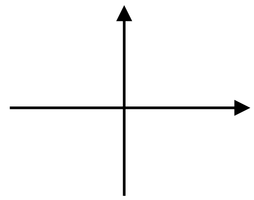
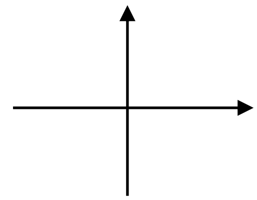
4. Écrire les règles suivantes en utilisant 2 paramètres, c'est-à-dire sous la forme canonique.

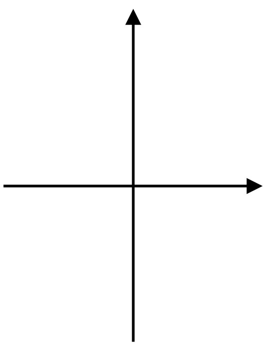
   a) $f(x) = -2(5)^{3x+2} - 10$

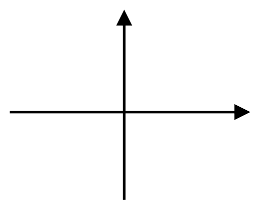
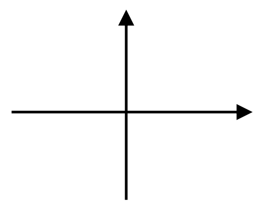
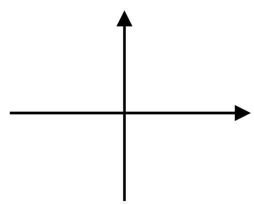
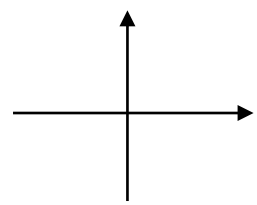
   b) $f(x) = 1 - 3(2)^{8x-4}$

❖ Effet des paramètres *a* et *b* sur le graphique d'une fonction de la forme $f(x) = a \cdot c^{bx}$

$c > 1$


a \ b	$b > 0$	$b < 0$
$a > 0$		
$a < 0$		

$0 < c < 1$


a \ b	$b > 0$	$b < 0$
$a > 0$		
$a < 0$		

Exercice : Vrai ou faux?

a) Toute puissance $(c)^x$ est positive (avec $c > 0$ et $c \neq 1$). ________

b) Les fonctions $f(x) = (2)^x$ et $g(x) = (0{,}5)^x$ sont réciproques l'une de l'autre. ________

c) La fonction $f(x) = (0{,}8)^x$ a une variation plus *forte* que $g(x) = (0{,}1)^x$. ________

d) Les fonctions $t(n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{2n}$ et $s(n) = \left(\frac{6}{4}\right)^{-n}$ représentent la même situation. ________

e) Les fonctions $k(t) = -(0{,}6)^t$ et $h(t) = -(0{,}6)^{-t}$ ont le même codomaine. ________

$\boxed{4.1.5}$ Zéro, équations et inéquations

Pour analyser une fonction ou résoudre une inéquation, il est toujours utile de tracer un croquis. Après avoir étudié l'aspect de la fonction exponentielle de base (selon que $c > 1$ ou $0 < c < 1$) et l'effet des paramètres, récapitulons les informations nécessaires pour tracer le **croquis d'une fonction exponentielle transformée** :

- l'équation de ______________________ ($y = k$)
- la valeur de ______________ (c) par rapport à _____
- le __________ du paramètre a
- le __________ du paramètre b

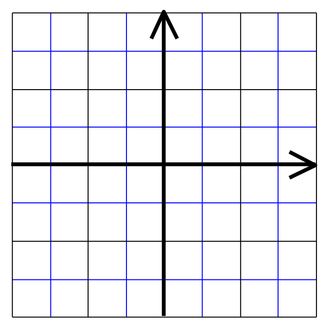
À partir de ce croquis, il est possible d'analyser certaines propriétés de la fonction exponentielle : le domaine, le codomaine, l'ordonnée à l'origine, etc. Cependant, avons-nous les connaissances nécessaires pour déterminer le zéro la règle de la réciproque?

Par exemple, analysons la fonction suivante : $f(x) = 3(2)^{2x-1} - 12$

Domaine : _____ Codomaine : _____

Équation de l'asymptote : __________

Ordonnée à l'origine : __________



Zéro : __________

Variation : ____

Signes : $\forall\ x \in$ _______________, *on a* $f(x)$ ___ 0

$\forall\ x \in$ _______________, *on a* $f(x)$ ___ 0

Règle de la réciproque :

$f(x) = 3(2)^{2x-1} - 12$

$y = 3(2)^{2x-1} - 12$

…

Comme nous l'avons constaté, il est possible de déterminer la valeur du zéro d'une fonction exponentielle en effectuant la résolution algébrique d'une équation exponentielle. Cette résolution se fait aisément lorsque les deux membres de l'équation s'expriment dans une même base. Dans notre exemple, il suffisait d'exprimer 4 en base 2 pour déduire l'égalité des exposants.

La résolution algébrique d'une équation exponentielle repose sur l'application de la propriété suivante :

$$\text{pour } c > 0 \text{ et } c \neq 1, \text{ on a} \qquad c^m = c^n \qquad \Rightarrow \qquad m = n$$

Pour résoudre des équations exponentielles, il suffit de :

1) exprimer les deux membres de l'équation dans la **même base**;
2) de l'égalité des **bases**, déduire l'égalité des **exposants** (principe fondamental);
3) résoudre cette dernière équation.

Mise au point #5 ► Corrigé à la page 58

1. Détermine <u>mentalement</u> la valeur de x qui vérifie l'équation exponentielle donnée.

a) $4^x = 4^6$ b) $3^{-0,5} = 3^{x+1}$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3$ d) $121^x = 11$

e) $\frac{1}{16} = 2^x$ f) $(\sqrt{5})^x = 25$ g) $8^x = 4^3$ h) $\sqrt[4]{2,3} = 2,3^x$

2. Résous algébriquement les équations exponentielles suivantes.

a) $5^{6-x} = 25^{2x+13}$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4^{10}$ c) $\left(\sqrt{2}\right)^{x+1} = 8^{-3x}$

d) $2\left(\frac{1}{3}\right)^{7-2x} = 162$ e) $4^{5x+7} = 8^{x-7}$ f) $125(25^x) = 5^8$

$\boxed{4.1.6}$ Exemples d'application en finances

Vous êtes probablement familiers avec les mots de vocabulaire suivants :

- Capital
- Échéance
- Intérêt simple et intérêt composé
- Liquidité
- Placement
- Rendement
- Sécurité (ou risque)
- Terme
- Taux d'intérêt
- Valeur d'un placement

Lorsque vous placez un montant d'argent dans une institution financière, cette dernière vous « remercie » du prêt que vous lui faites en vous remettant un certain montant d'argent en échange, c'est ce qu'on nomme « l'intérêt versé sur le capital ». Selon le type de placement effectué, vous pouvez recevoir soit des intérêts simples, soit des intérêts composés. Cependant, les taux d'intérêt sont <u>toujours</u> calculés <u>sur une base annuelle</u>.

Voyons de plus près comment les institutions financières calculent la valeur de vos placements après un nombre d'années donné. Pour ce faire, procédons à quelques simulations financières.

<u>Simulation 1</u> : Placement de 2000$ pour 5 ans à 6% (intérêt simple)

Temps écoulé (années)	0	1	2	3	4	5
Intérêt versé durant l'année ($)	╳					
Valeur du placement ($)	2000					

► La valeur du placement après t années est donnée par la règle $V =$ ____________________.

<u>Simulation 2</u> : Placement de 2000$ pour 5 ans à 6% (intérêt composé annuellement)

Temps écoulé (années)	0	1	2	3	4	5
Intérêt versé durant l'année ($)	╳					
Valeur du placement ($)	2000					

► La valeur du placement après t années est donnée par la règle $V =$ ____________________.

<u>Simulation 3</u> : Placement de 2000$ pour 5 ans à 6% (intérêt capitalisé 2 fois/année)

Temps écoulé (années)	0	½	1	1½	2	…	5
Valeur du placement ($)	2000					…	

► La valeur du placement après *t* années est donnée par la règle *V* = ______________________.

<u>Simulation 4</u> : Placement de 2000$ pour 5 ans à 6% (intérêt capitalisé mensuellement)

Temps écoulé (années)	0	1/12	2/12	3/12	4/12	…	5
Valeur du placement ($)	2000					…	

► La valeur du placement après *t* années est donnée par la règle *V* = ________________.

De manière générale, il est possible de déterminer la valeur d'un placement à intérêt composé à l'aide de la formule suivante :

où V est la valeur finale du placement
C_0 est la valeur initiale du placement (capital)
r est le taux d'intérêt <u>annuel</u> (ex: r = 0,05 si taux de 5%)
n est le nombre de capitalisations par année
t est le nombre d'années

Exercices sur les taux d'intérêt composés :

1. Pour chacune des situations, donne la règle en utilisant les variables V ($) et t (années).

   a) Un capital de 2000$ investi à un taux d'intérêt de 3% est capitalisé à chaque année

   Règle : ____________________

   b) Un capital de 5000$ investi à un taux d'intérêt de 8% est capitalisé 2 fois par année.

   Règle : ____________________

   c) Un capital de 5000$ investi à un taux d'intérêt de 1% est capitalisé 18 fois par année.

   Règle : ____________________

2. Vous placez 1 000$ à un taux de 5% d'intérêt annuel. Les intérêts sont capitalisés à tous les 4 mois. Ce placement est pour une période de 10 ans. Quel sera le montant accumulé à la fin de cette période ?

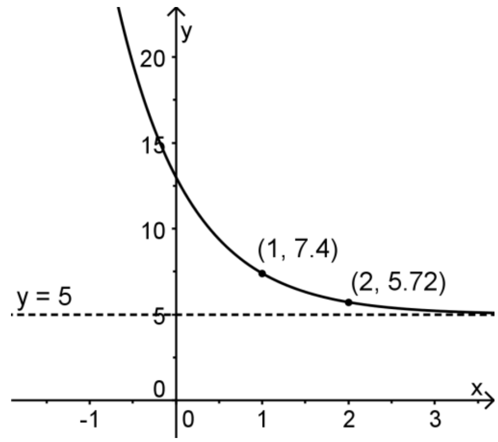
3. Le taux d'intérêt (annuel) est de 7% et ces intérêts sont capitalisés tous les deux mois. Quelle somme a été placée si, après 5 ans, le montant accumulé est de 3 540,49$?

4. Une somme de 2 500$ placée pour 15 ans génère un montant de 9 363,30$ (capital et intérêts). Les intérêts sont capitalisés 2 fois l'an. Quel est le taux d'intérêt annuel ?

5. Une somme de 2 500$ placée à un taux d'intérêt de 8% permet de cumuler un montant de 12 188,60$. Les intérêts sont capitalisés 4 fois l'an. Pendant combien d'années cette somme a-t-elle été placée ?

Mise au point #6 ► Corrigé à la page 58

1. La règle de la fonction représentée ci-contre est de la forme $f(x) = a \cdot c^x + k$. À partir des renseignements fournis, détermine cette règle.



2. De nos jours, le développement d'outils informatisés évolue à un rythme effarant. Les ordinateurs sont de plus en plus performants, la capacité de stockage progresse et la vitesse de transmission des données augmente sans cesse. Pour ces raisons, on estime que la valeur d'un ordinateur diminue d'environ 15% par année. On s'interroge sur la valeur éventuelle d'un ordinateur acheté aujourd'hui au coût de 1 200$.

   a) Dans cette situation, quelle est la valeur initiale ?

   b) Quel pourcentage de sa valeur l'ordinateur conserve-t-il d'année en année ?

   c) Quelle sera la valeur de l'ordinateur après :
      1) 2 ans ? 2) 4 ans ? 3) 10 ans ?

3. Un capital de 1 000$ est investi pour 5 ans à un taux d'intérêt de 6% composé annuellement.

   a) Détermine le montant accumulé après 5 ans.

   b) Détermine le capital qu'on doit investir, dans les mêmes conditions, pour obtenir un montant de 2 709,91$ à la date d'échéance ?

4.1.7 Base naturelle

MISE EN SITUATION :

Une somme de 1 k$ est placée à un taux d'intérêt annuel de 100%. (On peut toujours rêver!)

Déterminer la valeur *V* (en k$) de ce placement après un an si les intérêts sont capitalisés…

	$V = C_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} =$
1 fois (à la fin de l'année)	
2 fois (à tous les 6 mois)	
4 fois (à tous les trimestres)	
12 fois (à tous les mois)	
52 fois (à toutes les semaines)	
365 fois (à tous les jours)	
8 760 fois (à toutes les heures)	
525 600 fois (à chaque minute)	
continuellement (à tous les riens du tout)	

Le nombre *e* est une constante mathématique importante, à l'instar de π.

La constante *e* est parfois appelée « constante de Neper », du nom du mathématicien écossais John Neper qui introduisit les logarithmes. Il s'agit de la base des logarithmes naturels, aussi appelée « base naturelle ».

Le nombre *e* ne possède pas beaucoup d'autres applications qu'en finance, en électronique, en sciences et dans la recherche en mathématiques, mais son utilité est grande dans ces domaines! Son importance lui mérite une touche sur toute calculatrice scientifique.

Le développement décimal de *e* est illimité et non périodique.

$e = 2{,}718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 4\ldots$

L'exposant d'une base e se nomme ______________________ (ou *logarithme népérien*).

Le logarithme naturel de x s'écrit « ln x ».

À retenir…

$\log_e x = \ln x$.

et

$e^y = x \Leftrightarrow y = \ln x$

Exemple :

Un satellite de communication dispose d'une source d'énergie dont la puissance P, en watts, varie selon la règle $P(t) = 65e^{-t/300}$, où t est le temps écoulé, en jours, depuis la mise en orbite.

a) Quelle est la puissance du satellite…

i) au moment de sa mise en orbite?

ii) 1 an après sa mise en orbite?

b) S'agit-il d'une fonction croissante ou décroissante?

c) Si la durée de vie du satellite est de 1000 jours, déterminer le domaine et le codomaine de la fonction restreinte à la situation.

d) En utilisant une méthode de résolution graphique et/ou algébrique, déterminer à quel moment la puissance de la source est réduite :

i) de moitié ;

ii) à 8 watts.

4.2 FONCTIONS LOGARITHMIQUES

4.2.1 Propriétés des logarithmes

Nous avons déjà vu comment passer de la forme exponentielle à la forme logarithmique :

forme exponentielle		forme logarithmique
$x = c^y$	$\Leftrightarrow$	$y = \log_c (x)$
où c : base		où c : base
y : exposant		y : logarithme
x : puissance		x : argument

L'argument (x) est **toujours positif**, car la base l'est aussi!

En mathématique, il existe deux bases « particulières ».

Lorsque la base d'un logarithme n'est pas écrite, elle vaut 10 par défaut.

- Base 10 : $x = 10^y \Leftrightarrow$ ____________ $\Leftrightarrow$ ____________
- Base e (dite base *naturelle*) : $x = e^y \Leftrightarrow$ ____________ $\Leftrightarrow$ ____________

  $e = 2{,}718\ 281\ 828\ 459\ldots$

« ln » signifie logarithme naturel

Il existe des logarithmes simples à évaluer :

$\log_c (1) =$ _____ $\quad \log_c (c) =$ _____ $\quad \ln (e) =$ _____

Mise au point #7 ► Corrigé à la page 58

1. Trouver la valeur de l'expression logarithmique :

a) $\log_2 (64)$ b) $\log_4 (64)$ c) $\log (0{,}1)$

d) $\log_5 (0{,}008)$ e) $\log_{16} (64)$ f) $\log_{16} \left(\frac{1}{4}\right)$

g) $\log_3 (9)$ h) $\log_{25} (25)$ i) $\log_4 (1)$

j) $\log_5 \left(\frac{1}{25}\right)$ k) $\log_{2/3} (1)$ l) $\log (10\ 000)$

2. Trouver la valeur de x.

a) $\log_4 (x) = 0$ b) $\log_x (16) = 4$ c) $\log_8 (x) = \frac{2}{3}$

d) $\log_{64} (x) = \frac{7}{6}$ e) $\log_2 (x) = 1$ f)* $\log_x (x) = 0$

g) $\log_x (64) = 3$ h)* $\log_x (x) = 1$ i) $\log_{1/4} (x) = 2{,}5$

Comme il y a équivalence d'écriture entre les formes exponentielles et logarithmiques, il s'ensuit que les lois des exposants peuvent aussi s'exprimer sous forme logarithmique.

Lois des logarithmes

Soit a, b, m et $n \in \mathbb{P}_+^*$ et $a \neq 1$, $b \neq 1$

1. $\log_a(1) = 0$
2. $\log_a(a) = 1$
3. $a^{\log_a(m)} = m$ (LOI FONDAMENTALE)
4. $\log_a(mn) = \log_a(m) + \log_a(n)$
5. $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a(m) - \log_a(n)$
6. $\log_a(m^n) = n\log_a(m)$
7. $\log_a(m) = \frac{\log_b(m)}{\log_b(a)}$ (CHANGEMENT DE BASE)
8. $\log_a\left(\frac{1}{m}\right) = -\log_a(m)$
9. $\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$
10. $\log_{1/a}(m) = -\log_a(m)$

Démonstrations des lois des logarithmes…

<u>À quoi servent les lois des logarithmes ?</u>

- À exprimer le logarithme d'une puissance complexe en une somme et/ou une différence de logarithmes de puissances simples;

  Ex.1 : $\ln(5^x \cdot 6^{2x}) =$

- À exprimer une somme et/ou une différence de logarithmes de puissances simples en un seul logarithme d'une puissance complexe;

  Ex.2 : $5\log_2(x) + \log_2(x+4) =$

- À évaluer (*trouver la valeur*) d'une expression contenant des logarithmes;

  Ex.3 : $\log_5(10) =$

  Ex.4 : $\log_4(8) =$

D'ailleurs, pour <u>évaluer</u> une expression logarithmique, on peut :

- Essayer mentalement à l'aide de la définition d'un logarithme (« Quel est l'***exposant*** que je dois affecter à la *base* pour obtenir la *puissance*? »);

  Ex.5 : $x = \log_5(25)$

- traduire en expression exponentielle et résoudre;

  Ex.6 : $x = \log_3\left(\frac{1}{81}\right)$

- appliquer les lois des logarithmes;

  Ex.7 : $x = \log_5(6)$

Mise au point #8 ► Corrigé à la page 58

1. Écrire les expressions suivantes sous la forme développée.

a) $\log_c (2mn)$ b) $\log_5 (7(x + 2)^2)$ c) $\log_3 (4x^2)$ d) $\log_2 \left(\frac{5a}{b^2}\right)$

e) $\log_4 (4mn)^3$ f) $\log_6 (2(x + 1))^2$ g) $\log_4 \left(16\sqrt{x}\right)$ h) $\log (x^2 - 4)$

2. Écrire chacune des expressions numériques suivantes en utilisant un seul logarithme.

a) $\log_2 (5) + \log_2 (8)$ b) $\log_4 (45) - \log_4 (3)$ c) $\ln (7) + \ln (8) - \ln (4)$

d) $2 \log (25) - 3 \log (5)$ e) $\log_2 (0{,}5) + \log_2 (4) + 3 \log_2 (3)$ f) $\frac{\log_2 (9)}{\log_2 (10)} - \log (3)$

3. Sachant que $\log (2) = 0{,}301$ $\log (3) = 0{,}477$ $\log (5) = 0{,}699$ $\log (7) = 0{,}845$
déterminer la valeur des logarithmes suivants en appliquant les propriétés appropriées **sans utiliser la touche « LOG » ni « LN »** de la calculatrice.

a) $\log (9)$ b) $\log (14)$ c) $\log (45)$ d) $\log (90)$ e) $\log (50)$

f) $\log (7^5)$ g) $\log (0{,}5)$ h) $\log \sqrt{\frac{35}{6}}$ i) $\frac{\log (20)}{\log (40)}$ j) $\log (54) \times \log (70)$

4. Simplifier l'expression suivante :

$$\log (10) - \log \left(\frac{2}{5}\right) - \log \left(\frac{35}{2}\right) + \log \left(\frac{21}{2}\right) + \log \left(\frac{21}{63}\right)$$

4.2.2 Équations exponentielles

Pour résoudre une équation exponentielle à une variable, il faut :

1) ramener l'équation exponentielle à l'égalité de deux membres strictement positifs ;
2) appliquer la propriété
   $m = n \Rightarrow \log_c(m) = \log_c(n)$ pour $m > 0$ et $n > 0$;
3) appliquer les lois des logarithmes et des équations pour isoler la variable.

Exercices :

Résoudre les équations suivantes. *(Arrondir au millième.)*

1. $0 = -30(0,9)^{0,5x} + 15$

2. $2^x = 3^{x-1}$

3. $4^{2x-3} = 5^x$

4. $3 \cdot 2^{2x+1} = 10^{-x}$

Exemples :

1. Résoudre l'équation suivante: $6^{3x-1} = 4^x$
Écrire la solution en un seul logarithme, puis numériquement. *(Arrondir au millième.)*

2. Résoudre l'équation suivante: $7^{2x-1} = 10^x$
Écrire la solution en un seul logarithme, puis numériquement. *(Arrondir au millième.)*

3. Résoudre l'équation suivante: $3^{x+2} = 4^{5x}$
Écrire la solution en <u>un seul</u> logarithme, puis numériquement. *(Arrondir au millième.)*

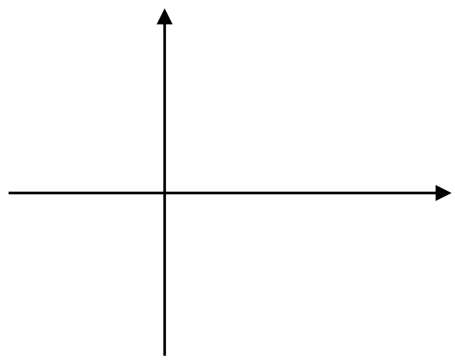
4. Résoudre l'équation suivante: $3^{15x+9} = 5^{7x}$
Écrire la solution numériquement. *(Arrondir au millième.)*

MISE EN SITUATION – LA NAPPE D'HUILE (VERSION ULTIME) :

Un accident s'est produit en haute mer : le réservoir d'huile d'un bateau est percé et l'huile se répand à la surface de l'eau. La superficie d'huile (en m²) à la surface de l'eau varie selon la règle suivante où t est exprimé en heures :

$$S = -12\left(\frac{1}{4}\right)^{0,5t} + 17$$

a) Représenter cette situation par un croquis.



b) Si 8 heures se sont écoulées avant que les secours n'interviennent, pendant combien de temps la superficie d'huile a-t-elle été supérieure à 150% de sa superficie initiale ?

c) Donner la règle qui correspond à la même situation dans laquelle t est exprimé en minutes.

MISE EN SITUATION – CRISE FINANCIÈRE

Le 1er septembre 2008, l'annonce d'une crise financière majeure frappe les marchés mondiaux. Le cours de l'action de l'entreprise *Exponensol* s'est subitement mis à varier selon la règle : $V(t) = -20 \cdot (5{,}2)^t + 60$, où V est exprimé en dollars et t est le nombre d'années écoulées depuis le 1er septembre 2008. Quand la valeur de l'action a atteint 20$, elle s'est stabilisée pendant exactement 1 an. Elle a ensuite perdu 5% de sa valeur tous les 4 mois.

Si la tendance se maintient, en quelle année et pendant quel mois l'action aura-t-elle perdu 75% de sa valeur initiale ?

Écrivez la règle de cette fonction par parties avant de répondre à la question posée.

4.2.3 Équations logarithmiques

Pour résoudre une équation logarithmique à une variable, il faut :

1) déterminer les restrictions (argument > 0) ;
2) écrire l'équation à l'aide d'un seul logarithme (utiliser les lois des logarithmes au besoin) ;
3) transformer l'équation sous forme exponentielle ;
4) résoudre l'équation exponentielle obtenue ;
5) **vérifier la validité de la ou des solution(s)**.

On verra que ce n'est pas la seule méthode de résolution…

Exemples :

1. $\log_2 (x - 3) = 4$

2. $\log_8 (2x - 7) = \log_8 (5 - x)$

3. $\log_3 (x + 4) - \log_3 (x) = 2$

4. $\ln\left(\dfrac{3x-4}{5}\right) = \ln(x)$

5. $\log_2(x-2) - \log_{1/2}(x+1) = \log_2(10)$

6. $\ln(5x) - 2\ln(4) = \ln(x-3)$

7. $\ln(x) - 2\ln(x-4) = -\ln(2)$

8. $\ln(x^2 - 1) + 2\ln(2) = \ln(4x - 1)$

De l'égalité des logarithmes dans une même base, on déduit

____.

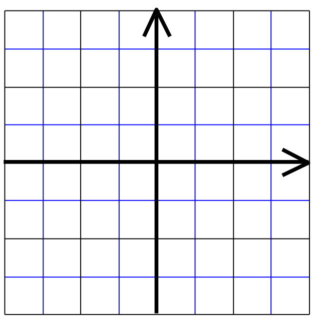
$\boxed{4.2.4}$ Fonction logarithmique de base

<u>Entrée en matière…</u>

Tracer le graphique de la fonction $f(x) = \log_2(x)$

Table de valeurs

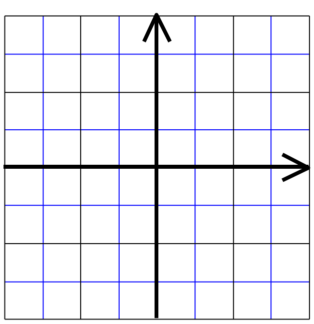
x							
$f(x)$							



Tracer le graphique de la fonction $g(x) = \log_{½}(x)$

Table de valeurs

x							
$g(x)$							



D'après les lois des logarithmes, on peut prouver que…

Fonction logarithmique de base

La règle de la fonction logarithmique de base est de la forme :

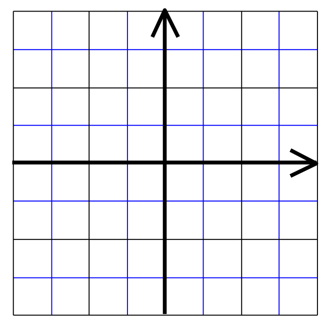
$$f(x) = \log_c(x)$$

où c est une constante différente de 1 ($c \neq 1$)
c est une constante supérieure à 0 ($c > 0$)

On observe que la base de la fonction logarithmique est soit $0 < c < 1$, soit $c > 1$.

Considérons les propriétés de la fonction logarithmique de base.

Règle : $f(x) = \log_c(x)$ avec c______ et c______



Domaine : ______ Codomaine : ______

Ordonnée à l'origine : ___________

Zéro : ___________

Extremum : ___________

Asymptote : ___________

Comme la fonction exponentielle, la fonction logarithmique possède 2 courbes « de base ».

Variation : étude de la croissance et de la décroissance

____ si c ______

____ si ______ c ______

Signes : étude du signe des images de la fonction

$\forall\, x \in$ ___________, *on a* $f(x)$ ____ 0

$\forall\, x \in$ ___________, *on a* $f(x)$ ____ 0

Réciproque : la réciproque de la fonction logarithmique est une ______________________.

Pour déterminer la règle de la réciproque :

$y = \log_c(x)$

$x = \log_c(y)$

…

4.2.5 Fonctions logarithmiques transformées

La règle d'une fonction logarithmique transformée est de la forme :

$$f(x) = a \log_c \left(b(x-h)\right) + k$$

où $c > 0$; $c \neq 1$ et $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Les paramètres *a*, *b*, *h* et *k* jouent encore et toujours les mêmes rôles. L'asymptote de la courbe d'une fonction logarithmique est influencée par le paramètre « *h* ».

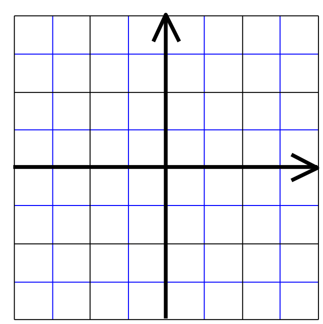
Paramètre	**Transformation…**
a	multiplie les ordonnées des couples de la fonction; si $a < 0$, symétrie par rapport à l'axe des abscisses.
b	divise les abscisses des couples de la fonction; si $b < 0$, symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
h	translation horizontale; additionne les abscisses.
k	translation verticale; additionne les ordonnées.

Considérons les propriétés de la fonction logarithmique transformée.

Règle : $f(x) = a \log_c \left(b(x-h)\right) + k$

avec a ____ 0 ; b ____ 0

et c______ ; c______



Graphique : courbe asymptotique à une droite verticale d'équation x = ______

Domaine : ________________________________

____

Codomaine : ______

Zéro : ________________________________

Ordonnée à l'origine : ____________________________

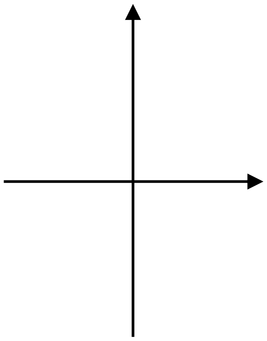
Extremum : ___________

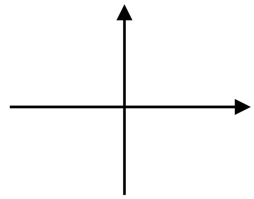
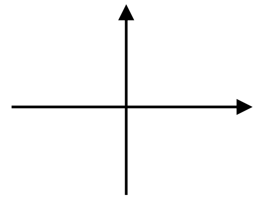
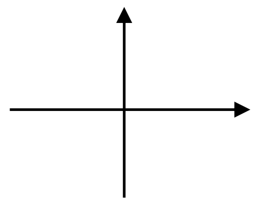
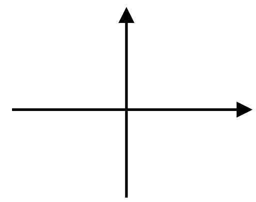
Variation : toujours croissante ou décroissante (étude de la base et des paramètres)

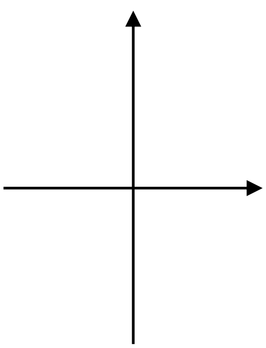
Signes : relatif à l'existence d'un zéro

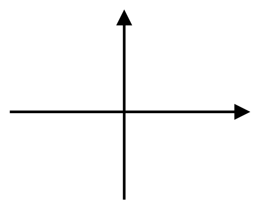
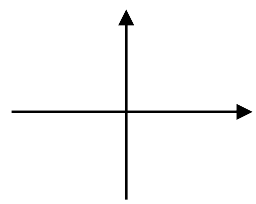
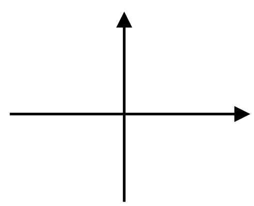
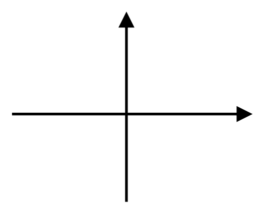
Réciproque : la réciproque de la fonction logarithmique est une ____________________.

Effet des paramètres *a* et *b* sur le graphique d'une fonction de la forme $f(x) = a \cdot \log_c(bx)$

$c > 1$


a \ b	$b > 0$	$b < 0$
$a > 0$		
$a < 0$		

$0 < c < 1$


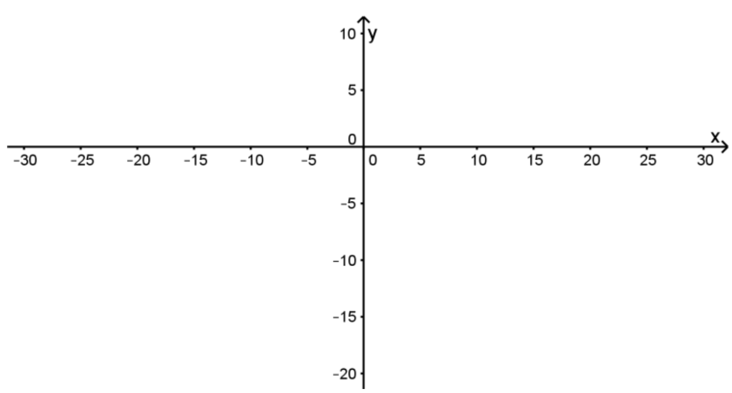
a \ b	$b > 0$	$b < 0$
$a > 0$		
$a < 0$		

Exemple : Tracer le croquis des fonctions logarithmiques suivantes dans le plan cartésien fourni.

$$f(x) = -5\log_6\left(5(x-12)\right)+10$$

$$g(x) = 12\log_{36}\left(-4x-40\right)-5$$

$$h(x) = -\log_{2/3}\left(x+5\right)-15$$



Exemple :

Faire l'étude complète des fonctions suivantes sans utiliser la calculatrice.

Domaine, Codomaine, Zéro, Signe, Variation, Ordonnée à l'origine, Équation de l'asymptote

a) $f(x) = 2 \log_3 (-x + 1) - 4$

b) $g(x) = 3 \log_{1/4} (-(x + 1))$

SITUATION-PROBLÈME :

Depuis 1910, des experts ont étudié la croissance démographique de deux villes lointaines. Ils ont observé que la population de Ste-Asymptote a varié selon la règle $P_1(t) = 20(1{,}015)^t$ où P_1 est exprimé en milliers d'habitants et *t* en années. À la fin des observations, la population était de 88 641 habitants. Pendant la même période, la population de Log City a évolué selon la règle $P_2(t) = 35\log_{1/4}(t+1) + 216$ où P_2 est également exprimé en milliers d'habitants.

Déterminer le taux de croissance annuel moyen de chacune de ces villes.

$\boxed{4.2.6}$ Recherche de la règle de la fonction logarithmique transformée

1ère méthode : par la réciproque

Exemple : Déterminer la règle de la fonction logarithmique g passant par les points A(2,0) et B$(1{,}05 \text{ ; } 2)$ et ayant son asymptote en $x = -3$.

2e méthode : par système d'équations

Nous sommes à la recherche d'une règle du modèle $f(x) = a \log_c \left(b(x-h)\right) + k$. Il y a donc 5 valeurs à déterminer. La tâche ne sera pas facile, quoique…

- Forme canonique de la fonction exponentielle : ______________________________
- Paramètres « facultatifs » de la fonction exponentielle : ______________________
- Paramètres « facultatifs » de la fonction logarithmique : ______________________
- Il s'agit finalement de chercher une fonction du modèle : _____________________

Refaire l'exemple précédent par système d'équations et comparer les deux réponses obtenues.

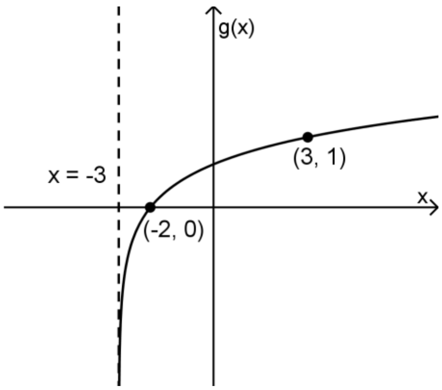
Il est possible de rechercher la règle d'une fonction logarithmique transformée écrite sous la forme $f(x) = \log_c (b(x - h))$.

En bref, pour déterminer la règle d'une fonction logarithmique transformée, il suffit de :

1) trouver l'équation de l'asymptote verticale et les coordonnées de deux points appartenant à la courbe ;
2) substituer la valeur de h dans la règle $f(x) = \log_c (b(x - h))$;
3) former un système d'équations en remplaçant x et $f(x)$ par les coordonnées des deux points appartenant à la courbe ;
4) résoudre le système de deux équations à deux inconnues pour obtenir la valeur du paramètre b et celle de la base c ;
5) donner la règle de la fonction logarithmique transformée.

<u>Exemple 1</u> : Donner la règle de la fonction logarithmique h passant par les points A(4, –1) et B(6, –2) et dont l'équation de l'asymptote verticale est $x = 2$.

Exemple 2 : Quelle est la règle de la fonction logarithmique *g* illustrée ci-dessous ?



Exemple 3 : La fonction logarithmique *f* dont le domaine est]2, +ζ passe par les points de coordonnées (20, 2) et (56, 3). Quelle est la règle de *f* ?

ANNEXE – CORRIGÉ des exercices « Mise au point »

Page 5 Mise au point #1 – *Corrigé*

1. a) 125 b) $\frac{1}{8}$ c) 1 d) 3 e) -3 f) 7
   g) 2 h) -4 i) $\frac{1}{3}$ j) 2 k) -1 l) 1

2. a) 486, 1458, 4374 b) 4, $\frac{4}{9}$, $\frac{4}{81}$ c) 2,5 ; 25 ; 250 d) 12, 3, $\frac{3}{4}$

3. a) 65, 325 b) 36, ..., 2916 c) $\frac{5}{8}$, …, 160 d) 14, …, 224

4. a) 5^7 b) $-2^4 \times 3^2$ c) $2^{15} \times 3^2$ d) $-2^5 \times 3^5$

Page 13 Mise au point #2 – *Corrigé*

1. a) $2 = \log (100)$ b) $3 = \log_5 (125)$ c) $3 = \log_{1/2} \left(\frac{1}{8}\right)$
   d) $2 = \log_a (25)$ e) $m = \log_a (x)$ f) $x = \log_b (a)$

2. a) 5 b) 3 c) 4 d) 2 e) -3 f) 3

3. a) $\log_3 (9) = 2$ b) $\log_5 (625) = 4$ c) $\log_{2,5} (t) = s$
   d) $\log_{1/8} (y) = x$ e) $\log_s (w) = v$ f) $\log_c (y) = x$

4. a) $6^2 = 36$ b) $n^z = 100$ c) $(0,75)^x = y$ d) $t^r = s$

Page 15 Mise au point #3 – *Corrigé*

1. a) $m = 3$, $n = -2$ b) $m = 6$, $n = 1,5$ c) $m = 100$, $n = 0,4$

2. a) $f(x) = 5(3)^x$ b) $f(x) = -4(5)^x$ c) $f(x) = (0,75)^x$

3. a) $f(x) = 8(3)^x$ b) $f(x) = -4(5)^x$ c) $f(x) = 0,75(0,5)^x$

Page 25 Mise au point #4 – *Corrigé*

1. $a = 12$ $b = 3$ $h = 1$ $k = \frac{-3}{4}$ et $c = 0,8$

2. a) $y = -3$ b) $y = 4$ c) $y = \frac{-2}{3}$ d) $y = 0$

3. a) $f(x) = 3(4)^{x-10} + 2$ b) $f(x) = -(81)^{x-2} - 5$

4. a) $f(x) = -50(125)^x - 10$ b) $f(x) = \frac{-3}{16}(256)^x + 1$

Page 28 Mise au point #5 – *Corrigé*

1. a) $x = 6$ b) $x = -1{,}5$ c) $x = -1$ d) $x = \frac{1}{2}$

   e) $x = -4$ f) $x = 4$ g) $x = 2$ h) $x = \frac{1}{4}$

2. a) $x = -4$ b) $x = -20$ c) $x = \frac{-1}{19}$ d) $x = \frac{11}{2}$ e) $x = -5$ f) $x = \frac{5}{2}$

Page 33 Mise au point #6 – *Corrigé*

1. $f(x) = 8(0{,}3)^x + 5$

2. a) 1 200$ b) 85% c) 1) 867$
   2) = 626,41$
   3) = 236,25$

3. a) = 1 338,23$ b) = 2 025,00$

Page 36 Mise au point #7 – *Corrigé*

1. a) 6 b) 3 c) –1 d) –3 e) 1,5 f) –0,5
   g) 2 h) 1 i) 0 j) –2 k) 0 l) 4

2. a) 1 b) 2 c) 4 d) 128 e) 2 f) $\varnothing$
   g) 4 h) $\mathbb{P}_+^* \setminus \{1\}$ i) 1/32

Page 39 Mise au point #8 – *Corrigé*

1. a) $\log_c(2) + \log_c(m) + \log_c(n)$ b) $\log_5(7) + 2\log_5(x + 2)$
   c) $\log_3(4) + 2\log_3(x)$ d) $\log_2(5) + \log_2(a) - 2\log_2(b)$
   e) $3\log_4(m) + 3\log_4(n) + 3$ f) $2\log_6(2) + 2\log_6(x + 1)$
   g) $\frac{1}{2}\log_4(x) + 2$ h) $\log(x + 2) + \log(x - 2)$

2. a) $\log_2(40)$ b) $\log_4(15)$ c) $\ln(14)$
   d) $\log(5)$ e) $\log_2(54)$ f) $\log(3)$

3. a) = 0,954 b) = 1,146 c) = 1,653 d) = 1,954
   e) = 1,699 f) = 4,225 g) = –0,301 h) = 0,383
   i) = 0,812 j) = 3,196

4. $\log(5)$

Chapitre 4 – Fonctions exponentielles et logarithmiques

CAHIER DE DEVOIRS

Exercices $\boxed{\textbf{4.1.1}}$ *Notion d'exposant (rappel)*

1. Simplifier chacune des expressions suivantes et donner la réponse à l'aide d'exposants positifs seulement.

a) $(a^{-5})^2 \cdot (a^{-2}b^3)^2 \cdot \left(a^{3/2}b^{-3}\right)^2 =$

b) $(-x^4y^2)^2 \cdot (-5x^{-1}y)^3 =$

c) $\left(\dfrac{27a^{-2}b^3}{(3ab^{-1})^2}\right)^{-2} =$

d) $\left(\dfrac{27a^3}{7b^4}\right)^2 \div \dfrac{(3a^{-1})^2}{7^3b^5} =$

e) $(a^{-3}b^2)^{-2} \cdot (\sqrt{a} \cdot b^{-1})^2 =$

f) $(\sqrt[3]{2} \cdot a^{-5}b^{-1}) \cdot (\sqrt[3]{2^2} \cdot a^3b^{-2}) =$

g) $\left(a^{-1/2}b^{3/4}\right)^3 \cdot \left(\sqrt{ab^3}\right) =$

h) $\left(\sqrt[4]{a^2b^{-3}}\right) \cdot \left(\sqrt{a} \cdot b^{-2}c^{-1}\right)^{-1/2} =$

i) $\left(\dfrac{12a^2b^{-4}c^{14}d^{-2}}{12^2a^2b^{-5}d^{10}}\right)^{-1} =$

j) $\dfrac{3^2 \cdot 9^2 \cdot 16^{-4} \cdot 81^2}{4^3 \cdot 32^5} =$

k) $\left(-4^{-2}p^4q^5\right)^3 \div \left(p^2q^{-3}\right)^4 =$

l) $\left(\dfrac{3^2x^6y^{-4}}{4^2\left(x^3\right)^{-1}y^5}\right)^{-3} \div \left(\dfrac{9^2xy^4}{8^4x^{-3}y^0}\right)^2 =$

m) $\left(\dfrac{a+6}{a-6}\right)^8 \cdot \left(\dfrac{a-6}{a+6}\right)^6 \div \left(\dfrac{a-6}{a+6}\right)^{14} =$

n) $\dfrac{(-2a)^3(-3b)^4\left(-4a^2\right)^{-5}}{b^{10}} =$

o) $\dfrac{\left(-x^3y\right)^4}{y^{-2}} \div \left(\dfrac{xy^6}{-3x^{-1}y^6}\right)^3 =$

2. Simplifier chacune des expressions suivantes et donner la réponse de manière à ce que chaque variable ait un coefficient positif.

a) $\left(x^3\right)^{a-1} \cdot \left(x^a\right)^2 \cdot x^{2+a} =$

b) $\dfrac{\left(b^2\right)^{n+1}}{\left(b^n\right)^{-3}} \cdot \dfrac{\left(b^{n+1}\right)^{-3}}{\left(b^3\right)^{n-2}} =$

c) $\dfrac{5^{-m}}{15^{-m}} \cdot 3^2 =$

d) $\dfrac{16^{-a}}{12^{-a}} \cdot \dfrac{3^{-a}}{8} =$

3. Le rayon de la Lune est d'environ $1{,}7 \times 10^3$ km et celui de la Terre est 3,75 fois plus grand que celui de la Lune. Le rayon de la planète Saturne est 9,4 fois plus grand que celui de la Terre.

a) Calculer le volume de la Lune $\left(V = \dfrac{4\pi r^3}{3}\right)$.

b) Calculer l'aire de la surface terrestre $\left(A = 4\pi r^2\right)$.

c) Combien de fois le volume de Saturne est-il supérieur à celui de la Lune ?

Exercices $\boxed{\textbf{4.1.2}}$ *Modèle exponentiel*

1. Dire si les fonctions suivantes sont croissantes ou décroissantes.

   a) $f(x)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$ b) $g(x)=(1{,}4)^x$ c) $h(x)=\dfrac{1}{7}(3)^x$

   d) $i(x)=\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-x}$ e) $j(n)=(c)^n \quad (0<c<1)$

2. Donner la règle du phénomène exponentiel représenté par la table de valeurs suivante.

Temps écoulé (années)	0	1	2	3	4
Population (milliers)	12	8	$5{,}\overline{3}$	$3{,}\overline{5}$	$2{,}\overline{370}$

3. Imaginer et rédiger un contexte pouvant être modélisé par la règle suivante : $f(x)=10\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^x$

   (en prenant soin d'identifier clairement les variables).

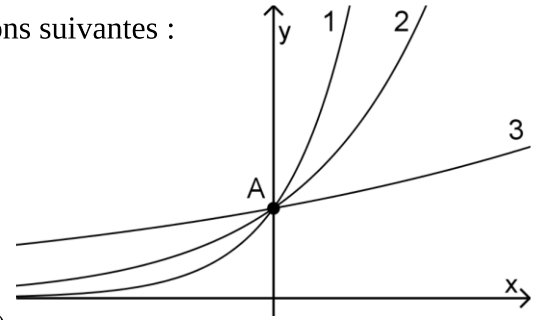
4. ***Mini-défi !*** Résoudre les équations suivantes.

   a) $3^{2x}=27$ b) $\dfrac{1}{4}=16^a$ c) $2^{4x}=8^{x-1}$

5. Trois croquis de courbes sont représentés dans le plan ci-dessous.

a) Associer chaque courbe à une des 3 fonctions suivantes :

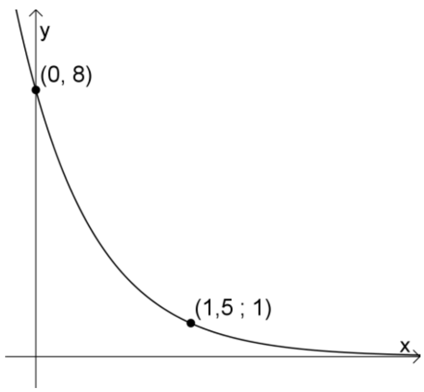
$f(x) = (4)^x$
$g(x) = (1{,}2)^x$
$h(x) = (2)^x$



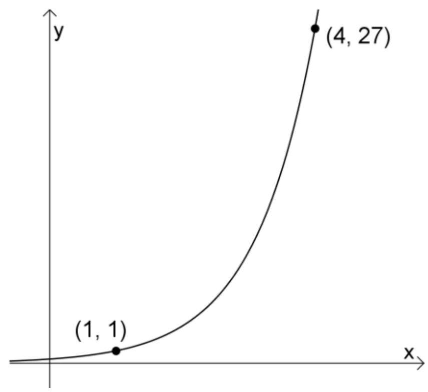
b) Quelles sont les coordonnées du point A ?
(Il s'agit du point d'intersection des trois fonctions.)

6. Déterminer la règle de chacune des fonctions exponentielles représentées ci-dessous.

a)

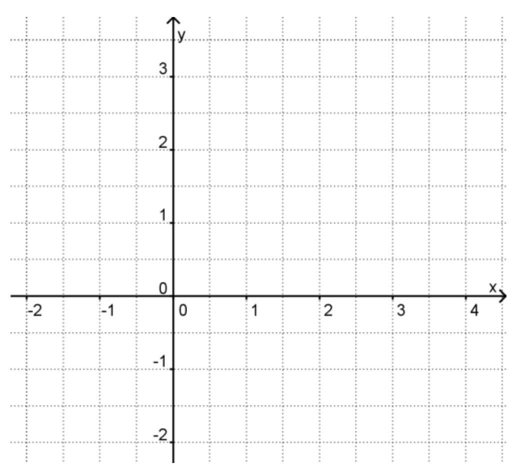


b)



7. Les porte-voix ont un rayon qui augmente de manière exponentielle. La forme d'un porte-voix permet de transmettre assez uniformément toutes les fréquences sonores.

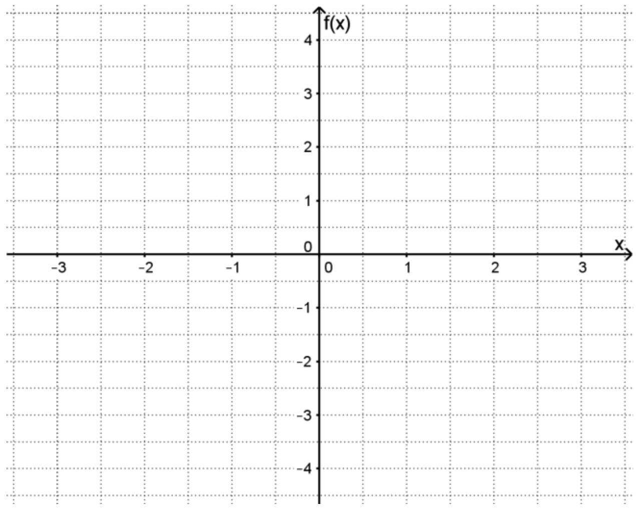
a) Dans un plan cartésien, dessiner la vue de profil d'un porte-voix à l'aide des courbes d'équation $y = 0{,}5(1{,}5)^x$ et $y = -0{,}5(1{,}5)^x$ sur l'intervalle $[-1\ ,\ 3]$.



b) Quel est le diamètre de chacune des extrémités du porte-voix si les mesures sont exprimées en décimètres?

Exercices $\boxed{\textbf{4.1.3}}$ *Fonction exponentielle de base*

1. Tracer le graphique de $f(x) = 0{,}25^{x}$ dans le plan cartésien ci-dessous. Pour vous aider, positionner avec précision au moins trois points appartenant à *f*.



2. Dire si les énoncés suivants sont vrais ou faux.
   a) La fonction $f(x) = 4^{x}$ est toujours positive. ________
   b) La fonction $f(x) = 10^{x}$ admet des images négatives pour certaines valeurs de son domaine. ________
   c) L'équation $10^{x} = -10$ admet une solution. ________

3. Quelle est la règle de la réciproque de…

   $f(x) = 5^{x}$ $\quad g(x) = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{x}$ $\quad h(x) = \log_{64}(x)$ $\quad n(x) = \log(x)$

4. Quel lien peut-on établir entre les graphiques des fonctions $f(x) = 0{,}125^{x}$ et $g(x) = 8^{x}$?

Exercices $\boxed{\textbf{4.1.3}}$ *Notation logarithmique*

1. Écrire chaque expression sous la forme exponentielle ou logarithmique, selon le cas.

a) $\log_3(81) = 4 \Leftrightarrow$

b) $25^{1/2} = 5 \Leftrightarrow$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3 \Leftrightarrow$

d) $\log_{1/2}\left(\frac{1}{8}\right) = 3 \Leftrightarrow$

e) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{-1}{2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow$

f) $\log_{27}(1) = 0 \Leftrightarrow$

g) $\log(0,01) = -2 \Leftrightarrow$

h) $3^{-3} = \frac{1}{27} \Leftrightarrow$

2. Trouver la valeur de *x* qui vérifie chacune des équations suivantes.

a) $\log_x(8) = 3$

b) $\log_{1/2}\left(\frac{1}{16}\right) = x$

c) $\log_x\left(\frac{1}{10}\right) = -1$

d) $\log_2(x) = 4$

e) $\log_{1/3}(x) = -1$

f) $\log_5(x) = 0$

g) $\log_x(9) = -2$

h) $\log_a(1) = x$

i) $\log_5(x) = \frac{1}{2}$

3. Écrire les expressions suivantes sous la forme exponentielle, puis trouver la valeur de x.

a) $\log_{1/2}(8) = x$

b) $\log_{\sqrt{3}}(9) = x$

c) $\log_4(8) = x$

d) $\log_{3/4}\left(\dfrac{16}{9}\right) = x$

4. Trouver la valeur des expressions suivantes.

a) $\log_{16}\sqrt{2} =$

b) $\log_{1/8}(32) =$

c) $\log_3\left(9\sqrt{3}\right) =$

d) $\log_5\left(125\sqrt{5}\right) =$

5. Trouver la valeur de x dans les expressions suivantes.

a) $\log_x(3) = \dfrac{1}{2}$

b) $\log_4(x) = -3$

c) $\log_x(121) = 2$

d) $\log_8(x) = \dfrac{4}{3}$

Exercices $\boxed{\textbf{4.1.4}}$ *Fonctions exponentielles transformées*

1. Représenter chacune des situations suivantes par une règle où t représente le temps écoulé <u>en années</u> depuis le début du phénomène et V, la valeur en dollars après t années.

   a) La valeur d'une action achetée au coût de 11$ augmente de 50 cents par année.

   Règle : ________________________

   b) Une voiture de 15 000$ perd 20% de sa valeur par année.

   Règle : ________________________

   c) La valeur d'une action achetée au coût de 11$ augmente de 50% tous les 6 mois

   Règle : ________________________

   d) La valeur d'une action achetée au coût de 11$ augmente de 50% tous les 24 mois

   Règle : ________________________

   e) Une voiture de 15 000$ perd 25% de sa valeur tous les 18 mois.

   Règle : ________________________

   f) Une œuvre d'art achetée au coût de 10 000$ gagne 15% de sa valeur 5 fois tous les 8 ans.

   Règle : ________________________

   g) Une œuvre d'art achetée au coût de 10 000$ gagne 15% de sa valeur 9 fois tous les 4 ans.

   Règle : ________________________

   Pour les deux situations suivantes, x représente le temps écoulé <u>en heures</u> depuis le début du phénomène et $f(x)$, le nombre de bactéries observées.

   h) Une population de 10 bactéries augmente de 10% toutes les 20 minutes.

   Règle : ________________________

   i) On remarque que d'une population de 150 bactéries, seulement 4 bactéries ne se reproduisent pas. Les autres se dédoublent trois fois toutes les 2 heures.

   Règle : ________________________

2. À l'aide des lois des exposants, réécrire chacune des règles suivantes sous la forme $f(x) = a \cdot c^{x} + k$ et donner les valeurs de a, c et k.

a) $f(x) = 1 - 2^{x}$

$a =$ __________

$c =$ __________

$k =$ __________

b) $f(x) = -1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$

$a =$ __________

$c =$ __________

$k =$ __________

c) $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{-x}$

$a =$ __________

$c =$ __________

$k =$ __________

d) $f(x) = 2\left(\frac{5}{4}\right)^{2x}$

$a =$ __________

$c =$ __________

$k =$ __________

e) $f(x) = 25(5)^{x-3}$

$a =$ __________

$c =$ __________

$k =$ __________

f) $f(x) = -(3)^{2x+4} - 3$

$a =$ __________

$c =$ __________

$k =$ __________

g) $f(x) = \left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^{2x+6} + \frac{2}{5}$

$a =$ __________

$c =$ __________

$k =$ __________

h) $f(x) = \frac{1}{3}(0{,}25)^{-0{,}5x+1} + 2$

$a =$ __________

$c =$ __________

$k =$ __________

i) $f(x) = -\sqrt[3]{27}(3)^{2x-3} - \sqrt[3]{81}$

$a =$ __________

$c =$ __________

$k =$ __________

3. Associer chacune des fonctions suivantes à l'un des modèles représentés ci-dessous.

a) $f(x)=3^x$ (______)

b) $f(x)=3(2{,}05)^x$ (______)

c) $f(x)=-\frac{1}{5}(0{,}5)^x$ (______)

d) $f(x)=2(3)^{-x}$ (______)

e) $f(x)=-3(2{,}05)^x$ (______)

f) $f(x)=0{,}1(1{,}2)^x$ (______)

g) $f(x)=0{,}3^x$ (______)

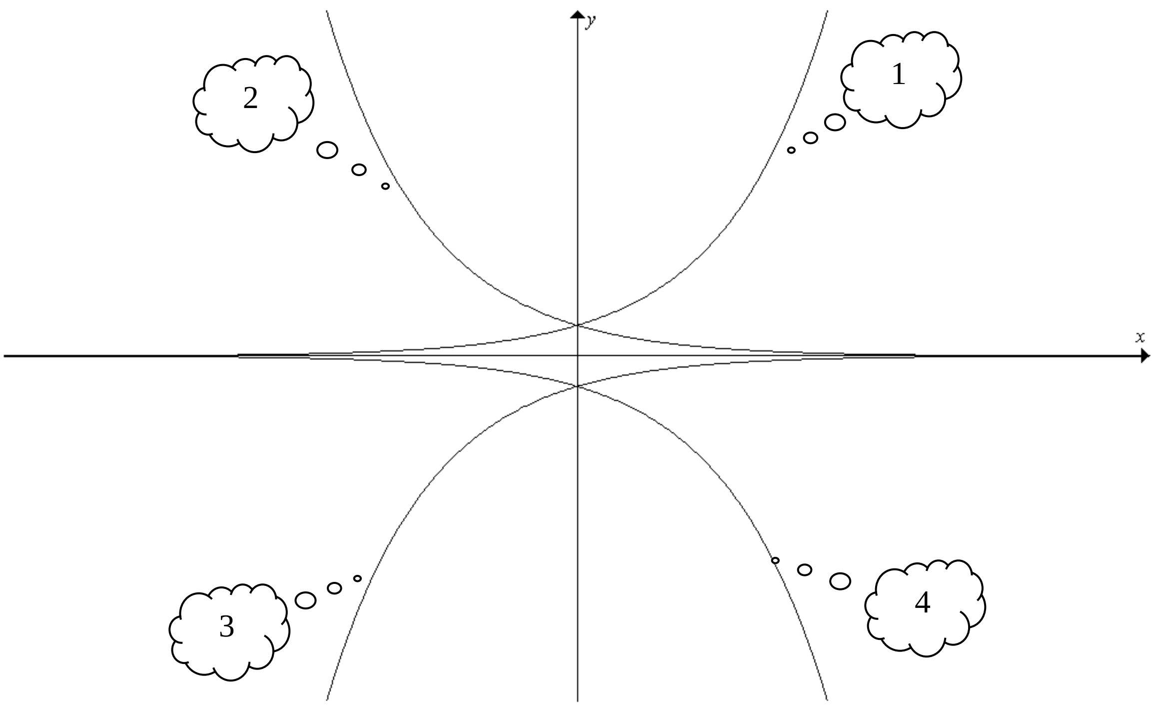
h) $f(x)=-0{,}5^x$ (______)

i) $f(x)=r^x, \quad r>1$ (______)

j) $f(x)=t^{-x}, \quad t>1$ (______)

k) $f(x)=-c^x, \quad 0<c<1$ (______)

l) $f(x)=-u^{-x}, \quad 0<u<1$ (______)



4. Écrire les règles des fonctions suivantes sous forme canonique.

a) $f(x)=-0{,}1\cdot(3)^{x+4}$

b) $f(x)=\frac{1}{5}(3)^{2x+2}$

5. Soit une fonction exponentielle de la forme $f(x) = a \cdot (c)^{x-h} + k$. Indiquer si les énoncés suivants sont vrais ou faux. Si un énoncé est faux, expliquer pourquoi.

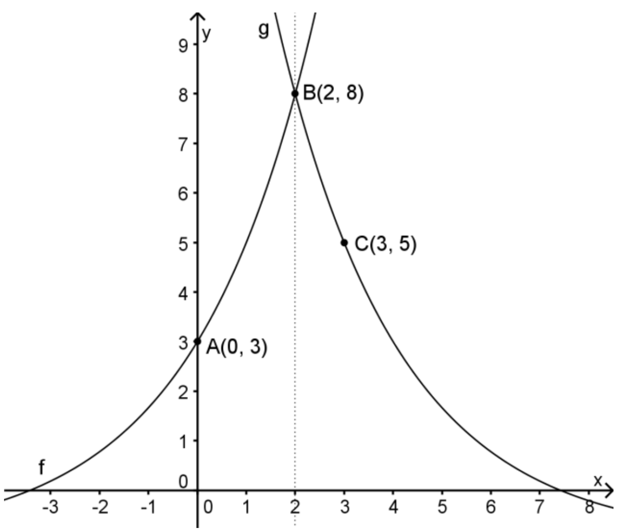
   a) Seule la valeur du paramètre *k* influence la position de l'asymptote.

   b) La fonction est décroissante si $a < 0$.

   c) La fonction possède un extremum dont la valeur correspond à celle de *k*.

   d) L'asymptote à la courbe de la fonction réciproque est verticale.

6. Les deux fonctions exponentielles illustrées ci-dessous sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x = 2$. Déterminer la règle de chaque fonction.



7. Déterminer la règle de la forme $f(x) = a \cdot c^x$ pour chacune des situations suivantes.

a)

Temps écoulé	0	1	2	3	4
Superficie d'huile	54	72	96	128	$\frac{512}{3}$

b) Soit une fonction exponentielle *f* telle que *f*(1) = 10 et *f*(2) = 1.

c)

Nombre de grenouilles	0	1	2	3	4	5	6
Nombre d'insectes			256			4	

d)

Niveau d'humidité	1	2	3	4	5	6	7
Nombre d'insectes		6075					78 125

e)

x	0	2	4	6
y	400	36	3,24	0,2916

8. Déterminer la règle de chacun des phénomènes exponentiels suivants.

a)

x	1	2	3	4	5
y	– 69	– 60	30	930	9930

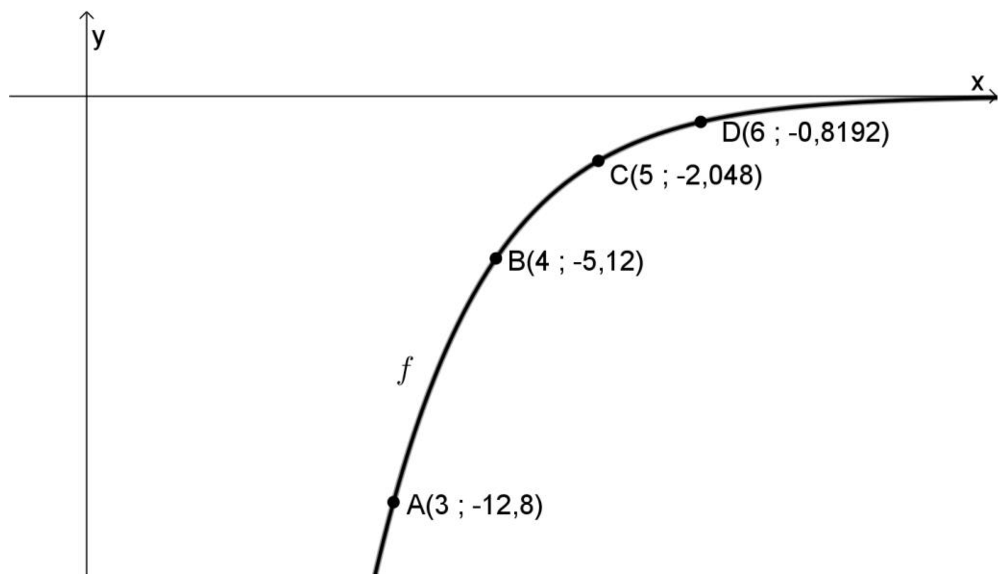
b)

x	– 2	0	1	2	4
y	– 113	– 68	– 52	– 39,2	– 20,768

c) *

x	-1	1	3	5	7
y	1,005	1,02	1,08	1,32	2,28

d)



Exercices $\boxed{\textbf{4.1.5}}$ *Zéro, équations et inéquations* *(fonction exponentielle)*

1. Trouver la valeur de *x* qui vérifie chacune des équations suivantes.

a) $9^{2x} = 27$

b) $5^{2x-1} = 125$

c) $3^{x+2} = \dfrac{1}{9}$

d) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-5} = 16$

e) $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{x} = 5^3$

f) $\left(\dfrac{2}{7}\right)^{2-x} = \left(\dfrac{49}{4}\right)^2$

g) $4^{x+3} = 8^{-x}$

h) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x+1} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{x+5}$

i) $\left(\dfrac{9}{16}\right)^{x-3} = \dfrac{4}{3}$

2. Résoudre les équations suivantes.

a) $3^{2x} - 45 = 36$

b) $6 \cdot 2^{x+2} - 130 = 62$

c) $4 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{1-x} + 12 = 48$

3. Soit la fonction $f(x) = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4} - 6$. Déterminer la valeur de x telle que…

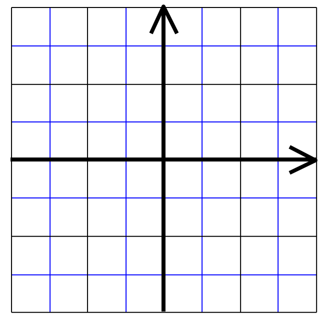
a) $f(x) = 34$ b) $f(x) = 4$ c) $f(x) = -1$

4. Trouver le zéro de chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 30 \cdot 5^{-x+2} - 6$ b) $f(x) = 5 \cdot 3^{x/4} - 135$ c) $f(x) = 5 - 245 \cdot 7^{x/3}$

5. Compléter l'étude de la fonction suivante : $f(x) = 3(0,25)^{-0,5x+1} + 2$

Règle de la fonction sous forme canonique :



____

Domaine : ______ Codomaine : ______

Équation de l'asymptote : ___________

Ordonnée à l'origine : ___________

Zéro : ___________

Variation : ____

Signes : $\forall\, x \in$ ________________, *on a* $f(x)$ ___ 0

Réciproque : la règle de la réciproque est …

6. Résoudre les équations suivantes.

a) $216 = (6)^{x+1}$

b) $0 = 125\left(\frac{1}{5}\right)^{3x} - 1$

c) $0 = 11(7)^{2x-1} - 539$

d) $\left(\frac{1}{4}\right)^{8x} = 2^{-10x+18}$

e) $\sqrt[3]{\frac{2}{7}} \cdot \left(\frac{49}{4}\right)^{2x+12} = \frac{7^{3x}}{2^{3x}}$

f) $0 = \frac{3^{2x}}{\sqrt{3^{2x-10}}} - 81$

7. Détermine les coordonnées du point d'intersection de la fonction $f(x) = -\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{x} + 3$ et de la droite d'équation $y = 6$.

8. Faire l'étude de la fonction $f(x) = -\frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{-3x-1} + 1$.

Domaine :

Codomaine :

Ordonnée à l'origine :

Zéro(s) :

Signe :

Variation :

Équation de l'asymptote :

C'est une inéquation…
Il faut faire un croquis!

9. Déterminer sur quel intervalle la fonction $f(x) = -\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{2x+3} - 2$ est inférieure à la fonction $g(x) = -\left(\frac{27}{8}\right)^{x} - 2$.

10. Voici trois défis… Saurez-vous les relever?

a) Déterminer les valeurs possibles de m pour que la fonction $f(x)=\frac{1}{4}(3m-2)^{5x+7}$ soit décroissante.

*b) Déterminer les valeurs possibles de c pour que le zéro de la fonction $g(x)=-3(c)^{2x-1}+6$ se trouve dans l'intervalle $]1, 2]$.

**c) Déterminer les valeurs possibles de c pour que le zéro de la fonction $h(x)=(c)^{2x}-4$ se trouve dans l'intervalle $]-1, 2]$.

EXERCICES RÉCAPITULATIFS A (section 4.1)

1. Déterminer, s'il existe, le zéro de chacune des fonctions suivantes.

   a) $f_1(x)=3\cdot(2)^{x-3}-96$

   b) $f_2(x)=10-15\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-2}$

   c) $f_3(x)=7{,}5\cdot(6)^{-x}+6$

   d) $f_4(x)=0{,}2\cdot(0{,}85)^{x-5}-0{,}2$

2. Soit *f* et *g* des fonctions définies par les règles $f(x)=2\cdot\left(3^{-2x}-5\right)$ et $g(x)=2\left(\dfrac{1}{9}\right)^{4x}-10$.

   Déterminer algébriquement pour quelles valeurs de *x* on a :

   a) $f = g$

   b) $f > g$

   c) $f < g$

3. Un analyste financier examine les actifs de 2 compagnies depuis leur fondation il y a 5 ans. L'actif de la compagnie 1 est donné par la règle $A_1 = 10\ 000 \cdot (2)^{0,5t}$ et celui de la compagnie 2 évolue selon le modèle $A_2 = 625 \cdot (4)^{0,75t}$.

   a) À quel moment l'actif de la compagnie 1 était-il le double de celui de la compagnie 2?

   b) Après combien de temps les deux compagnies ont-elles eu le même actif?

4. Vrai ou faux? Expliquer.

   a) L'ordonnée à l'origine de la courbe d'équation $y = e^x$ est *e*.

   b) En algèbre, il est astucieux d'employer la lettre *e* pour nommer une variable dans une mise en contexte lorsqu'on cherche un nombre de quelque chose dont la première lettre est *e*.

5. Le rapport financier d'une compagnie minière montre que la masse salariale *m* versée aux employés pour les années 1997 à 2007 a varié selon la règle $m = 0{,}8e^{0,245t} + 1{,}4$ où *m* est exprimé en millions de dollars et *t* en années depuis 1997.

   a) Quelle a été l'augmentation de la masse salariale pendant cette période?

   b) En quelle année la masse salariale a-t-elle dépassé 6M$?

6. Trouver la valeur de x qui vérifie chacune des équations exponentielles suivantes.

a) $3^x = 27\sqrt{3}$

b) $5^{-x} = 5 \cdot \sqrt[3]{5}$

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1} = 16 \cdot \sqrt[3]{2}$

d) $3^x \cdot \sqrt{3} = 9^{2x}$

e) $\left(\frac{1}{9}\right)^{x+2} = 3\sqrt{3}$

f) $2^{-3x} = \frac{\sqrt{2}}{8}$

7. Résoudre les équations exponentielles suivantes.

a) $3^{2x+3} \cdot 9^x = 81^{1-x}$

b) $5^{2x-1} \cdot 5^{x+3} = 1$

c) $\frac{4^{3+x}}{2^x} = \frac{1}{8^x}$

d) $8^{x-1} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2^{x+1} = 16^{-1}$

e) $\frac{9^x}{2^{2x}} = \frac{4}{9}$

f) $\frac{27^x}{243} = 9^x \cdot 3^{-x}$

8. Résoudre les équations suivantes.

a) $e^{2x+3} = \left(\frac{1}{e}\right)^{-19}$

b) $e^6 + 2 = \left(e^{2x}\right)^3 + 2$

c) $\frac{(2e)^3}{e^2} = 8e^{x+3}$

9. Résoudre les équations suivantes.

a) $4^x \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{2^{-1}}\right)^2 = 2^{x+1}$

b) $\sqrt[3]{7^x} \cdot \frac{1}{7} = 343 \cdot 7^x$

c) $9^{x+1} \cdot \sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 27^{-x}$

d) $5^{x+3} \cdot 5^{x-1} = \frac{1}{25}$

e) $8^{2x} \cdot \sqrt[3]{4^x} = \frac{1}{32}$

f) $\left(3^{-2}\right)^{x+1} \cdot \frac{1}{9^x} = \frac{1}{81}$

10. Résoudre les équations suivantes.

a) $\left(27^{x}\right)^{-2} = \left(9^{x+1}\right)^{2}$

b) $\left(4^{x/3}\right)^{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{8^{x}}} = 16$

c) $\left(125^{x-1}\right)^{-2} \cdot \sqrt{25^{x}} = \dfrac{\left(5^{-2}\right)^{x+2}}{25^{-x}}$

11. Résoudre les équations suivantes.

a) $5 \cdot 2^{x} = 40$

b) $8 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x} = \dfrac{8}{27}$

c) $30 \cdot 5^{-x+2} = 6$

d) $5 \cdot 3^{x/2} = 135$

e) $9 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^{x+1} = 72$

f) $35 \cdot 7^{x+3} = \dfrac{5}{7}$

12. Résoudre les équations suivantes.

a) $\left(3\cdot\sqrt[3]{9}\right)^x = \dfrac{1}{9}$

b) $\left(5^{3-x}\right)^2 \cdot 125^{-1} = 25^{x+1}$

c) $\left(8\cdot\sqrt{2}\right)^x = 16$

13. Soit la fonction exponentielle d'équation $f(x) = -27\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-x+3} + \dfrac{1}{9}$.

Déterminer :

a) Dom f

b) Codom f

c) Zéro de f

d) Intervalles liés aux signes de la fonction

e) Sens de variation

f) $f(0)$

g) Équation de l'asymptote

h) Règle sous la forme $f(x) = a(c)^x + k$

i) Règle de sa réciproque

14. En 1990, Boris a acheté une voiture décapotable au coût de 8 000$. Au cours des 6 premières années, son auto perdait 15% de sa valeur annuellement. Durant les 4 années suivantes, la valeur du véhicule est demeurée stable. Par la suite, la rareté et l'attrait de ce modèle ont fait qu'elle est devenue une pièce de collection. Cela a eu pour effet d'augmenter sa valeur de 10% à chaque année.

    a) Donner la règle permettant de connaître la valeur annuelle de la voiture pendant les 6 premières années.

    b) Quelle était la valeur de la voiture 8 ans après son achat ?

    c) En quelle année la voiture valait-elle le même prix que lors de son achat ?

15. Résoudre algébriquement chacune de ces inéquations

    a) $0{,}25(5)^x > 31{,}25$

    b) $2\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} - 18 < 0$

    c) $\left(e^{3x}\right)^2 > \left(\frac{1}{e}\right)^3$

16. Soit la fonction $f(t) = -3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{0,5t+1} + 6$.

a) Sur quel intervalle f est-elle négative ?

b) Écrire la règle de la fonction f sous la forme $f(t) = a(c)^t + k$.

17. Donner la règle des fonctions exponentielles suivantes.

a)

x	2	4	7	8	9
***f*(*x*)**	2,5	38,5	1091,5	3278,5	9839,5

b)

x	– 1	3	4	5	7
***g*(*x*)**	– 0,5	– 648	– 3888	– 23 328	– 839 808

Exercices $\boxed{\textbf{4.2.1}}$ *Propriétés des logarithmes*

1. Soit l'expression $\log_c(M)$.

   a) Quelles sont les restrictions liées à la base c ?

   b) Quelle est la restriction liée à l'argument M ?

2. Quelle est la valeur de la base dans l'expression $\log(27)$?

3. Compléter les égalités sachant que $a \neq 1$, $a > 0$, $M > 0$ et $N > 0$.

   a) $\log_a(a) =$

   b) $\log_a(1) =$

   c) $\log_a(MN) =$

   d) $\log_a\left(\dfrac{M}{N}\right) =$

   e) $\log_a\left(M^3\right) =$

4. Réécrire l'expression suivante avec une base supérieure à 1 (sachant que $M > 0$).

   $\log_{1/2}(M) =$

5. Écrire la propriété des logarithmes qui permet de calculer la valeur du logarithme d'un nombre dans n'importe quelle base (positive et différente de 1, bien sûr…).

   $\log_a(M) =$

6. Écrire sous la forme <u>d'une somme ou d'une différence de logarithmes</u> :

   $\log_3\left(\dfrac{2x^2y}{z^4}\right) =$

7. Écrire sous la forme <u>d'un seul logarithme</u> :

$$2\log_3(ab)+\log_3(c)-\frac{1}{2}\log_3(4)-1=$$

8. Quelle est la valeur de l'expression suivante?

$$\left(\log_b(b)\right)^3+\left(\log_b\left(b^2\right)\right)^0-\log_b\left(\frac{1}{b}\right)+\log_b(1)=$$

9. Sachant que $\log_b(3)\approx 0,60$ et $\log_b(5)\approx 0,88$ déterminer la valeur de $\log_b(75)$.

10. Si $\log_b(2)=M$ et $\log_b(3)=N$, quelle est la valeur de $\log_b\left(\frac{\sqrt{27}}{8}\right)$?

11. Calculer la valeur de $\ln\left(e^e\right)+\log_e\left(e^e\right)+e^{\ln e}$.

12. Écrire les expressions suivantes sous forme logarithmique.

a) $2^a=x$

b) $y=5^{x-1}+3$

13. En passant de la forme logarithmique à la forme exponentielle, trouver la valeur de *x* dans l'expression suivante.

$$\log_2(x+1)=4$$

*
14. Résoudre l'équation exponentielle suivante. Donner la solution sous la forme <u>d'un seul logarithme</u>.

$$R^{(x-1)}=S^{(3-2x)}$$

15. Écrire les expressions suivantes sous la forme d'une somme ou d'une différence de logarithmes.

a) $\log_2\left(5^3\times 7\right)$

b) $\log_3\left(\dfrac{8}{11}\right)^2$

c) $\log\sqrt{6\times 5}$

d) $\log_{1/4}\left(\dfrac{5\times\sqrt{7}}{3}\right)$

16. Écrire sous la forme d'un logarithme d'une seule expression.

a) $\log_3(7)+2\log_3(5)$

b) $\frac{1}{2}\left(\log_a(3)+\log_a(5)\right)-\log_a(2)$

c) $\log_2(15)-3\log_2(7)-\log_2(5)$

d) $2\log_6(x)-\log_{1/6}(y)-\frac{1}{2}\log_6(a)-\log_6(b)$

17. Trouver la valeur des expressions suivantes.

a) $\log_3\left(\frac{\sqrt[4]{3}}{3}\right)$

b) $\log_2\left(\frac{24}{3}\right)^{-2}$

c) $\log_a\sqrt{21}$, si $\log_a(3)=c$ et $\log_a(7)=d$

d) $10^{\log(3)}$

e) $\frac{\log_3(81)}{2}+\log_3\left(\frac{27}{3}\right)$

f) $\log_2(8)-\log_2\left(2^4\right)-\left(\log_2(4)\right)^2$

Exercices $\boxed{\textbf{4.2.2}}$ *Équations exponentielles*

Résoudre les équations exponentielles suivantes. *(Arrondir au millième.)*

a) $3^{x+2} = 4$

b) $6^{3x-1} = 4^{x}$

c) $e^{2x-1} = 15^{x+2}$

d) $2^{x-7} = 25 \cdot 3^{2x}$

e) $(10)^{x/5} = (0,2)^{x-40}$

f) $0,4 \cdot 2^{0,5x} = 3^{2x+1}$

g) $-3 \cdot 2^{x-3} = -0{,}5 \cdot 5^{2x+2}$

h) $(14)^{-x/2} = -3$

i) $4\left(\dfrac{1}{e}\right)^{2x+3} = 14 \cdot (3)^{7x-1}$

j) $-(0{,}1)^{\log_{0,1}7} = -2(10)^{6x} + 3$

k) $8 \cdot e^{5x} = 8 \cdot 10^{x}$

*l) $(e)^{x(x-1)} = 3^{x+1/2}$

Exercices $\boxed{\textbf{4.2.3}}$ *Équations logarithmiques*

1. Résoudre les équations suivantes.

a) $\log_3(4x)=2$

b) $\log_{1/2}(x-6)=3$

c) $\dfrac{\log_3(x)}{2}=1$

d) $\log(5-x)=0$

e) $\log_2\dfrac{(x-5)}{4}=4$

f) $\log_x(6)=\dfrac{1}{2}$

g) $\ln(6x)=2$

h) $\log_2(16)=3x$

i) $2\log(x)=6$

2. Trouver la valeur de x qui vérifie chacune des équations suivantes.

a) $\log_3(2x-5)=\log_3(7)$

b) $\log(3x+4)=\log(x)$

c) $2\log_6(x)-\log_6(25)=0$

d) $\log_5(x)-1=2$

3. Trouver la valeur de *x* qui vérifie chacune des équations suivantes.

a) $\ln\left(\dfrac{2-x}{3}\right)=\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$

b) $\log(7-2x)=2-\log(35)$

c) $\log_2(x+1)+\log_2(5)=3$

d) $\log_4(x)+2\log_4(3)=\log_4(x-8)$

e) $\log(x+3)-\log(x)=1$

f) $\log_{0,5}(3-4x)=\log_{0,5}(x+2)+3$

EXERCICES RÉCAPITULATIFS B (section 4.2)

1. La fonction $f(x)=1500\cdot\log_6(2x)$ donne le profit en dollars qu'une compagnie peut réaliser dans *x* mois, après une campagne de publicité. Quel serait le profit dans :

   a) 3 mois?

   b) 8 mois?

*2. Calculer la valeur de $\frac{x}{y}$, sachant que $2\log_5(x-3y)=\log_5(2x)+\log_5(2y)$.

3. Déterminer le(s) point(s) d'intersection des courbes définies par les règles suivantes :

$$f(x)=\log(x-2) \text{ et } g(x)=1-\log(x+1)$$

4. Un élément radioactif se désintègre exponentiellement de telle sorte qu'il ne reste que les trois cinquièmes de sa masse initiale après 10 ans. Si on possède 80 g de cet élément à un moment donné, dans combien d'années ne restera-t-il que 16 g ?

5. Nestor a placé 3000$ à un taux d'intérêt annuel de 4,5%. Les intérêts sont capitalisés aux 4 mois. Dans ces conditions, en combien d'années le capital aura-t-il doublé? (arrondir au dixième)

6. À quel taux faudrait-il placer une somme d'argent pour qu'elle double en sept ans, si les intérêts sont capitalisés annuellement?

7. On estime que la valeur V d'une machine dans t années est donnée par la fonction $V = V_0 \cdot (e)^{-0,07t}$ où V_0 est la valeur initiale de la machine. Dans combien d'années cette machine vaudra-t-elle le quart de sa valeur initiale?

8. Monica établit que la règle $p = 1{,}5\log(2x+2)$ donne le profit en milliers de dollars qu'une entreprise espère réaliser dans x mois, suite à une campagne publicitaire.
   a) Dans combien de mois le profit sera-t-il de 1500$?
   b) Quel sera le profit dans 10 mois ?

9. Le nombre de bactéries dans une culture triple toutes les deux heures.
   a) Donner la règle de la fonction qui exprime le nombre N de bactéries présentes dans une culture au bout de t heures s'il y avait initialement N_0 bactéries.
   b) Donner la règle de la fonction qui permet de calculer le nombre t d'heures écoulées pour obtenir les N bactéries.

EXERCICES DE RÉVISION A (chapitre complet)

Répondre aux numéros 1 à 5 <u>sans utiliser la calculatrice</u> !

1. Pour quelles valeurs de *n* la fonction *f* est-elle croissante?

   a) $f(x) = n^{-x} - 5$

   b) $f(x) = -2\log_{8n-1}(x)$

2. Déterminer mentalement la valeur manquante :

   a) $\log_m(25) = 1,42 \quad \Leftrightarrow \quad \log_m\left(\frac{1}{25}\right) = ?$

   b) $\log_8(n) = \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \log_n(8) = ?$

   c) $\log(16) = p \quad \Leftrightarrow \quad \log_{1/10}(16) = ?$

3. Résoudre l'inéquation : $14 - 2\log_4(x) > 10$.

4. Résoudre l'inéquation : $-(8)^{x-2} + 5 \geq -(2)^{6-x} + 5$.

5. Résoudre les systèmes d'équations :

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{5} \\ \dfrac{x+1}{y+1} = \dfrac{5}{11} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2^{x+y} = 64 \\ 9^{x-y} = \dfrac{1}{81} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{3^{x-1}}{9^{x-y}} = 9 \\ \dfrac{4^{y}}{32^{x}} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Calculatrice autorisée pour répondre aux numéros 6 à 12.

6. Le nombre de bactéries d'une culture microbienne augmente de 40% toutes les heures. Combien d'heures devront être complétées pour que le nombre de bactéries passe de 100 à plus de 5 000 000 ?

7. En septembre 1995, Anne-Marie a placé 2300$ dans un régime enregistré d'épargne-retraite (REER) à un taux d'intérêt de 9% composé annuellement. En quelle année son placement dépassera-t-il 18 000$?

8. Un ballon d'anniversaire qui contient 8 000 cm^3 d'air perd 1/5 de son contenu toutes les 12 heures. Dans combien d'heures le volume d'air du ballon sera-t-il inférieur à 2000 cm^3 ? (arrondir à l'entier)

9. Guillaume laisse tomber une balle par la fenêtre du septième étage de l'immeuble qu'il habite. Après chaque bond, la balle s'élève aux 4/5 de la hauteur du bond précédent. Guillaume calcule que sa balle a atteint 16 m après le premier bond. Après combien de bonds la balle atteindra-t-elle une hauteur d'environ 45 cm ?

10. Au mois de mai, une population d'insectes triple tous les deux jours. Si, à un certain moment, on dénombre 48 361 000 insectes, combien de jours auparavant y en avait-il 91 ?

11. Une certaine substance se désintègre en perdant 1/5 de sa masse à tous les 40 ans. Si des observations sont effectuées sur 500 g de cette substance, après combien d'années n'en restera-t-il que 204,8 g ?

12. Le pneu avant d'un vélo se dégonfle de manière telle que la pression d'air dans le pneu diminue de 12% à tous les six mois. Dans ces conditions, dans combien de temps la pression d'air dans le pneu aura-t-elle diminuée de 40% ?

EXERCICES DE RÉVISION B (chapitre complet)

Répondre aux numéros 1 à 19 <u>sans utiliser la calculatrice</u> !

1. Quelle est la valeur de $\log_c(3)$ si $\log_c(12) = 9{,}94$ et $\log_c(2) = 2{,}77$?

2. Soit la fonction : $f(x) = \log_{\left(\frac{1}{4}\right)}(x+2) - 3$. Évaluer :

   a) $f(0)$: ______ b) x, si $f(x) = -3$: ______

   c) $f(6)$: ______ d) x, si $f(x) = -4$: ______

3. Trouver la valeur de :

$$\frac{\log_{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(4^3\right) - \log_2\left(\frac{1}{64}\right)}{\log_5(5) + \log_3(1)}$$

4. Résoudre l'équation suivante : $\log_2(x^2 + 3x - 2) = 3$

5. La fonction définie par $f(x) = \log_2(-5x-1)-2$ est-elle croissante ou décroissante dans l'intervalle $]-5,-1]$?

6. On considère la fonction : $f(x) = \log_c(x)$ Compléter par le symbole « > » ou « < » qui convient.

   a) si $c > 1$ et $x > 1$ alors $\log_c(x)$ ____ 0

   b) si $c > 1$ et $0 < x < 1$ alors $\log_c(x)$ ____ 0

   c) si $0 < c < 1$ et $0 < x < 1$ alors $\log_c(x)$ ____ 0

   d) si $0 < c < 1$ et $x > 1$ alors $\log_c(x)$ ____ 0

7. La fonction définie par $f(x) = -\log_{\left(\frac{9}{7}\right)}(2x+3)-1$ est-elle croissante ou décroissante dans l'intervalle $]2,8]$?

8. On considère la fonction $f(x) = c^x$ et la fonction transformée $g(x) = c^{x-h}$ $(h \neq 0)$.

   VRAI ou *FAUX* ?

   a) On obtient le graphique cartésien de *g* à partir du graphique cartésien de *f* par une translation horizontale. ____________

   b) Si *h* est positif, la translation s'effectue vers la droite et si *h* est négatif, la translation s'effectue vers la gauche. ____________

   c) La fonction *g* n'admet jamais de zéro. ____________

   d) L'axe des abscisses est toujours l'asymptote au graphique cartésien de la fonction *g*.

   ____

   e) Si $c > 1$, *g* est croissante et si $0 < c < 1$, *g* est décroissante. ____________

   f) La fonction *g* peut être négative pour certaines valeurs de *h*. ____________

9. Si $\log_c(2) = x$; $\log_c(3) = y$; $\log_c(5) = z$, simplifier $\log_c\left(\dfrac{4\sqrt{6}}{15}\right) - 3\dfrac{\log_4(5)}{\log_4(c)}$.

10. Quelle est l'équation de l'asymptote et le zéro de la fonction définie par :

$$f(x) = \log_{\left(\frac{2}{3}\right)}(4x-2)-1$$

11. Résoudre l'équation logarithmique suivante :

$$\log(x+5)-\log(x-1)=\log(x-1)$$

12. Résoudre l'équation logarithmique suivante :

$$\log_c(x+1)+\log_c(x-2)=\log_c(5)+\log_c(2)$$

13. Résoudre l'équation logarithmique suivante :

$$\log_{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(x^2+3\right)-\log_{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(x^2-4\right)=-3$$

14. Déterminer la règle de la réciproque de chaque fonction :

a) $f(x)=2\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}-4$

b) $g(x)=3(2)^{3-2x}-2$

15. Déterminer l'ordonnée à l'origine de la fonction définie par la règle :

$$j(x)=\frac{1}{2}\log_3\left(\frac{1}{3}-3x\right)-1$$

16. Quelles valeurs pouvons-nous donner à c pour que la fonction définie par $g(x)=\left(2c-\frac{3}{2}\right)^x$ soit une fonction exponentielle décroissante?

17. Soit les fonctions :

$$f(x) = 4^x \quad ; \quad g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x \quad ; \quad h(x) = \log_4(x) \quad \text{et} \quad j(x) = \log_{\left(\frac{1}{4}\right)}(x)$$

Quelle distance sépare l'intersection de *f* et *g* de l'intersection de *h* et *j* ?

Choix de réponses : A) 1 unité B) $\sqrt{2}$ unités C) $\sqrt{3}$ unités D) 2 unités

*18. Résoudre :

a) $\log_{\sqrt{x}}(x) + \log_x(16) = 4$

b) $16\sqrt{72} = 3(2)^{3x+6}$

c) $\dfrac{5^{3x}}{8^x} \leq \dfrac{2}{5}$

19. Résoudre l'inéquation suivante : $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{2x+4} \leq \dfrac{1}{81}$

Calculatrice autorisée pour répondre aux numéros 20 à 25.

20. Résoudre : $15^{2x} \cdot 34 = 291 \cdot 16^{x-1}$

21. Sachant qu'une fonction logarithmique *f* passe par les points A(–10, 1) et B(–4, 3) et qu'elle possède une asymptote d'équation $x = -2$, déterminer la règle de *f*.

22. La valeur d'un placement à intérêt composé annuellement évolue en fonction du temps écoulé depuis le début de ce placement. On sait qu'après une année, la valeur d'un certain placement est 4815$ et qu'après 5 ans sa valeur est de 6311,48$. Par contre, on a oublié quel était le capital investi au départ…

    Après combien de temps ce capital sera-t-il augmenté d'au moins 3500$?

23. Un distributeur de gaz propane s'aperçoit qu'un de ses réservoirs fuit. Il évalue que la fuite occasionne une perte de 3% du contenu du réservoir à chaque jour.

    Après combien de temps le réservoir contiendra-t-il 80% de son contenu initial?

24. Soit les fonctions $f(x) = 2^{2x-1}$ et $g(x) = 10^{3-x}$. Quelles sont les coordonnées du point de rencontre de ces deux fonctions?

*25. Résoudre l'équation exponentielle $8 \cdot 5^{x} + 5^{x-2} - 5^{x+1} = 380$.

DÉFIS ULTIMES SANS CALCULATRICE! (chapitre complet)

1. Déterminer la valeur de $\log\left(\frac{3}{2}\right)+\log\left(\frac{4}{3}\right)+\log\left(\frac{5}{4}\right)+\ldots+\log\left(\frac{200}{199}\right)$.

2. Déterminer la (ou les) valeur(s) de x solution(s) de $12^{2x+1}=2^{3x+7}\cdot 3^{3x-4}$

3. Déterminer les valeurs de x et y pour lesquelles $x^3y^5=2^{11}\cdot 3^{13}$ et $\frac{x}{y^2}=\frac{1}{27}$

4. Si $\log_8(3)=k$, exprimer $\log_8(18)$ en fonction de k.

5. La courbe représentative de $y=ax^r$ passe par les points A(2, 1) et B(32, 4).
   Déterminer la valeur de r.

6. Démontrer l'égalité suivante : $\log_{c^n}(b)=\frac{1}{n}\log_c(b)$.

La « 11e loi des logs » !

Table des matières du « cahier de devoirs »