VECTEURS – CORRIGÉ DES NOTES DE COURS

Page 1 – Exemple 1

a) scalaire b) vectorielle c) scalaire d) vectorielle e) scalaire f) vectorielle

Page 3 – Exercice

a) 297° b) 270° c) 180° d) 135° e) 58° f) 110° g) 155° h) 245°

Page 5 – Exemple 2

a) Vrai b) Vrai c) Faux : $\vec{F_1} + \vec{F_2} = \vec{0}$ d) Faux : $\left\|\vec{F_1} + \vec{F_2}\right\| = 0$

e) Vrai f) Faux : $\left\|\vec{F_1} + \vec{F_2}\right\| = \left\|\vec{F_1}\right\| - \left\|\vec{F_2}\right\|$ g) Vrai h) Faux : $\vec{F_1} = -\vec{F_2}$

Page 5 – Exemple 3

a) $\vec{r}$: 20 km à 290° b) $\vec{u}$: 40 km à 20° et $\vec{w}$: 40 km à 200°

Page 6 – Exemple 4

a) D(9, 0) b) $-\overrightarrow{CD} = (-8, 10)$

Page 7 – Exemple 5

$\vec{v} = (-3, -5)$

Page 7 – Exemple 6

$\overrightarrow{AB} = (8, -7)$ $\overrightarrow{BA} = (-8, 7)$ $-\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} = (8, -7)$

Pages 8-9 – Exercices sur les composantes des vecteurs

1. D(9, 4)
2. $c = -4$, $d = 3$ et $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 5$
3. $\vec{t} = (8, -1)$
4. D(-4, 0)
5. a) $\|\vec{p}\| = 13$ b) $-\vec{p} = (5, -12)$ et $\|-\vec{p}\| = 13$
6. $\vec{v} = \left(-4, \frac{-2}{5}\right)$

Page 10 – Exemple 7

2e cas : $\theta = 180° - \tan^{-1}\left(\frac{5}{6}\right) \approx 140{,}19°$

Formule : $\theta = 180° - \tan^{-1}\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|$

1er cas : $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{3}\right) \approx 59{,}04°$

Formule : $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|$

3e cas : $\theta = 180° + \tan^{-1}\left(\frac{6}{5}\right) \approx 230{,}19°$

Formule : $\theta = 180° + \tan^{-1}\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|$

4e cas : $\theta = 360° - \tan^{-1}\left(\frac{6}{2}\right) \approx 288{,}43°$

Formule : $\theta = 360° - \tan^{-1}\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|$

… et autres cas particuliers : $\theta_{\vec{a}} = 0°$ $\theta_{\vec{b}} = 90°$ $\theta_{\vec{c}} = 180°$ $\theta_{\vec{d}} = 270°$

Page 11 – Exemple 8

$\theta_{\vec{w}} = 180° - \tan^{-1}\left(\frac{11}{17}\right) \approx 147{,}09°$

Page 11 – Exemple 9

$$\overrightarrow{CD} : \begin{cases} \left\|\overrightarrow{CD}\right\| = \sqrt{4^2 + (-7)^2} \approx 8{,}06\ u \\ \theta_{\overrightarrow{CD}} = 360° - \tan^{-1}\left(\frac{7}{4}\right) \approx 299{,}74° \end{cases}$$

Page 11 – Exemple 10

a) $\theta_{\vec{r}} = 180° + \tan^{-1}\left(\frac{7}{4}\right) \approx 240{,}26°$ b) $\theta_{\vec{s}} = tan^{-1}\left(\frac{6}{2}\right) \approx 71{,}57°$

Page 12 – Exemple 11

$F_x : 8\sqrt{3}$ $F_y : 8$ $\vec{F} = (8\sqrt{3}, 8) \approx (13{,}86; 8)$

Page 13 – Exemple 12

	En x…	En y…
$\vec{F}_1$	15 cos 55° ≈ 8,60 N	15 sin 55° ≈ 12,29 N
$\vec{F}_2$	10 cos 255° ≈ –2,59 N	10 sin 255° ≈ –9,66 N
$\vec{F}_3$	20 cos 325° ≈ 16,38 N	20 sin 325° ≈ –11,47 N
$\vec{F}_R$	≈ 22,40 N	≈ –8,84 N

Page 14 – Exemple 1

a) Oui b) Non c) Oui

Page 15 – Exemple 2

Oui, car 220° – 40° = 180°

Page 15 – Exemple 3

Oui, car $\frac{7}{-3} = \frac{-14}{6}$

Page 16 – Exemple 4

… *colinéaires* : $3 \times 35 - 7 \times 15 = 0$

$\vec{v} = (5 \times 3,\ 5 \times 7) = 5(3,\ 7)$

$\vec{v} = 5\vec{r}$ ou $\vec{r} = \frac{1}{5}\vec{v}$

Page 16 – Exemple 5

$b = -6$

Page 16 – Exemple 6

a) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$

b) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GH}$
$\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$

c) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$

d) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IJ}$
$\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{IJ}$
$\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{IJ}$
$\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{IJ}$

Page 18 – Exemple 1

$$\vec{R} : \begin{cases} \|\vec{R}\| \approx 6{,}7\ u \\ \theta_{\vec{R}} \approx 209{,}6° \end{cases}$$

Page 20 – Exemple 2

$$\vec{R} : \begin{cases} \|\vec{R}\| \approx 2{,}24\ u \\ \theta_{\vec{R}} \approx 255{,}3° \end{cases}$$

Page 22 – Exercice

$\vec{R} = (-41{,}83\ ;\ 26{,}96)$ $\|\vec{R}\| \approx 49{,}77$ N Orientation : $180° - \tan^{-1}\left(\frac{26{,}96}{41{,}83}\right) \approx 147{,}2°$

Page 24 – Exemple 3

$$\vec{R} : \begin{cases} \|\vec{R}\| \approx 9{,}7\ u \\ \theta_{\vec{R}} \approx 38{,}9° \end{cases}$$

Page 25 – Exemple 4

a) $\overrightarrow{PM}$ b) $\vec{0}$ c) $\overrightarrow{BC}$ d) $\vec{0}$

e) $\vec{0}$ f) $\overrightarrow{MA}$ g) $\vec{0}$ h) $\overrightarrow{FD}$

Page 26 – Exemple 5

a) $\vec{v} = (6,\ -15)$

b) $\vec{w} = (-5; 12{,}5)$

c) $\vec{s} = (0,\ 0) = \vec{0}$

Page 27 – Exemple 6

a) $\vec{R} : \begin{cases} \|\vec{R}\| = 6\ u \\ \theta_{\vec{R}} = 50° \end{cases}$ b) $\vec{R} : \begin{cases} \|\vec{R}\| = 6\ u \\ \theta_{\vec{R}} = 180° + 50° = 230° \end{cases}$

Pages 27-28 – Exercices sur la multiplication d'un vecteur par un scalaire

1. a) $\vec{v} = (-4, 10)$ b) $\|\vec{v}\| \approx 10{,}77\ u$ c) $\theta_{\vec{v}} = 180° - \tan^{-1}\left(\frac{10}{4}\right) \approx 111{,}8°$

2. $t = \frac{18}{-12} = \frac{-10{,}8}{7{,}2} = \frac{-3}{2}$ ou -1,5

3. a) Oui, car $\frac{7}{5} = \frac{8{,}4}{6}$ b) $\vec{v} = \frac{5}{6}\vec{n}$

4. $k_1(k_2\vec{u}) = (k_1k_2)\,\vec{u}$ a) $\vec{n} = (6, -18)$ b) non c) oui

5. a) $\vec{t} = (22, 5)$ b) $\|\vec{t}\| = 22{,}56\ u$ c) $\theta_{\vec{t}} \approx 12{,}8°$

6. $a = -3$ et $b = 7$

Page 31 – Exemples

$\vec{u} \bullet \vec{v} = \frac{65\sqrt{3}}{4} \approx 28{,}15$ $\vec{u} \bullet \vec{v} = 2 \cdot 5 \cdot \cos 140° \approx -7{,}66$ $\vec{u} \bullet \vec{v} = -1 \times 4 + 2 \times 2 = 0$ donc $\vec{u} \perp \vec{v}$

Pages 32-33 – Exercices sur le produit scalaire de deux vecteurs

1. et 2. *correction en classe…*

3. $\vec{q} \bullet \vec{v} \approx 743{,}14$ Nm ou 743,14 J

4. Puisque les vecteurs $\vec{q}$ et $\vec{p}$ sont orthogonaux, le produit scalaire sera nul : $\vec{q} \bullet \vec{p} = 0$.

5. Un angle obtus $\theta \in\ ]90°, 180°]$ a un cosinus négatif, donc le produit scalaire sera négatif.

6. $\theta_{\vec{s},\vec{t}} \approx 48°$

7. $\vec{q} \bullet \vec{t} = 5 \cdot 1 + (-2) \cdot 3 = -1u^2$

8. $\vec{s} \bullet \vec{v} = 0$

9. $\vec{C} \bullet \vec{D} = 2 \cdot 5 \cdot \cos(105° - 25°) \approx 1{,}74\,u^2$

Page 34 – Exercice

a) $\vec{w} \approx 2\vec{u} - 2{,}5\vec{v}$

b) impossible!

Page 34 – Question bonus

$\vec{w}$ ne peut être exprimé comme une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires entre eux mais non colinéaires avec $\vec{w}$.

Page 35 – Exemple 1

a) $a = 2$ b) $a = 2$ et $b = -3$

Page 35 – Exemple 2

$\vec{v} = -10\vec{s} + 9\vec{r}$

Page 35 – Exemple 3

$\vec{w} = 2\vec{u} + 4\vec{v}$

Page 36 – Exemple 4

$\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ $\vec{v} = -5\vec{i} + 2\vec{j}$ $\vec{w} = -4\vec{i} - 2\vec{j}$ $\vec{s} = 5\vec{i} - 3\vec{j}$ $\vec{t} = -4\vec{j}$

Page 36 – Exemple 5

a) $\vec{w} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ b) $\vec{w} = 10\vec{i} - 13{,}5\vec{j}$

Page 37 – Exemple 6

$\vec{w} = -\frac{3}{5}\vec{u} + \frac{4}{5}\vec{v}$

Page 37 – Exemple 7

Oui, car (1, 0) et (1, 1) sont linéairement indépendants (c'est-à-dire non colinéaires), donc on peut dire qu'ils forment une base vectorielle dans le plan. En effet, n'importe quel vecteur $\vec{v} = (x,\ y)$ peut s'exprimer comme suit : $\vec{v} = (x - y)\cdot(1, 0) + y\cdot(1, 1)$.

Pages 38-39 – Exercices récapitulatifs

1. $\overrightarrow{BA} = (-10\,,\ 1)$

2. $\theta_{\vec{v}} - 210° = 300° - 210° = 90°$ ou bien $\vec{u} \bullet \vec{v} \approx -10{,}39\cdot 10 + -6\cdot -17{,}32 \approx 0$

3. (10, 6) et (-10, -6)

4. $\vec{s} \bullet \vec{p} = 0$ car $\theta_{\vec{s},\vec{p}} = 90°$

5. $d = \frac{6}{5}$

6. $\vec{q} \bullet \vec{t} = 0\cdot 17\cos 337° + -21\cdot 17\sin 337° \approx 139{,}49\ u^2$

7. Faux, car même s'ils sont orthogonaux, $\vec{r}$ et $\vec{s}$ ne sont pas des vecteurs unitaires.

8. $\vec{v} = 50\sqrt{3}\,\vec{i} + 50\,\vec{j}$

Pages 40-43 – Exercices récapitulatifs (suite)

9. $\|\vec{v}\| \approx 3{,}61$ u

10. $\vec{i} \bullet \vec{j} = 0$ car $\theta_{\vec{i},\vec{j}} = 90°$

11. $\vec{r} - \vec{s} + 2\vec{n} = (-6,\ -5)$ donc $\begin{cases} \|\vec{r} - \vec{s} + 2\vec{n}\| \approx 7{,}81\ u \\ \theta_{\vec{r}-\vec{s}+2\vec{n}} \approx 219{,}81° \end{cases}$

12. Impossible, car $\vec{p}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires!

13. a) $\vec{p} = -5\vec{i} + 12\vec{j}$ b) $\vec{p} = 0{,}5\vec{i} - 1{,}5\vec{j}$ c) $\vec{p} = -24\vec{i} + 60\vec{j}$

14. $\vec{u} \bullet \vec{v} \approx 24{,}32\ u^2$ (peu importe la méthode)

15. a) vrai b) vrai c) vrai d) vrai e) vrai

16. Si $a = \dfrac{-1}{2}$, alors $\vec{v} = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{2}\right)$ et $\vec{t} = \left(\dfrac{-3}{2}, \dfrac{-3}{2}\right)$ sont orthogonaux.

17. a) $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont opposés b) $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux c) $\vec{v}$ et $\vec{z}$ sont colinéaires

d) $\vec{s}$ est un vecteur nul e) $\vec{s}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires f) $\vec{s}$ et $\vec{p}$ sont colinéaires

18. a) vrai b) vrai c) $\vec{w} = 2\sqrt{2}\ \vec{i} - 4\sqrt{2}\ \vec{j}$ d) $\vec{z} = \left(0, \dfrac{\sqrt{2}}{5}\right)$

Page 44 – Problème 1

Le temps requis est environ 0,32 heure (ou 19 minutes et 21 secondes).

Page 45 – Problème 2

La combinaison linéaire est $\vec{DT} = 70\vec{u} + 3{,}5\vec{v}$.

La clé pourrait donc se trouver à (6 132,18 ; 3 520) ou (10,83 ; 146,89).